

相对论谐波辐射对激光参数与等离子体参数的依赖特性

杜春光 曾贵华 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所强激光开放研究实验室, 上海 201800)

(1997 年 7 月 7 日收到; 1998 年 4 月 20 日收到修改稿)

分析了相对论谐波辐射对入射激光参数和等离子体参数的依赖特性. 结果表明: 入射激光强度、脉冲宽度、脉冲形状和等离子体密度等参数对相对论谐波辐射有重要的影响. 所得结果为实验提供了参考和依据.

PACC: 5260; 5240D

1 引 言

随着强激光技术的进展, 不断发现激光等离子体相互作用^[1]的许多新现象^[2], 强激光与等离子体相互作用产生的相对论谐波辐射^[3,4]即是其中之一. 在欠稠密等离子体中, 电子受强激光驱动, 产生横向相对论性非线性电流, 它激发相对论相干谐波辐射^[3-9]. 研究相对论谐波辐射对研究以等离子体为基础的相干辐射源有重要意义. 应用中提高谐波的转化效率是一个重要问题, 它是将研究成果推向实用化的关键. 转化效率依赖于激光参数和等离子体参数, 研究相对论谐波辐射对参数的依赖特性对提高谐波转化效率意义重大. 本文将分析几个参数(入射脉冲宽度、脉冲强度、脉冲形状和等离子体密度等)对相对论谐波辐射的影响.

2 谐波演化方程

激光等离子体相互作用可用矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 Φ 所满足的 Maxwell 方程以及等离子体中电子流体所满足的动力学方程和连续性方程来描述, 在均匀等离子体中, 如果激光的有效光斑半径 r_s 远大于等离子体波长 λ_p , 则激光束的真空衍射时间 τ_d ($\tau_d = \pi r_s^2 / \lambda c$) 大于包络演化的特征时间 τ_e ^[3], 谐波辐射问题可在一维条件下处理. 这种条件下, 根据文献[6, 7], 方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{a} = k_p^2 \frac{n}{n_0} \frac{\mathbf{a}}{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = k_p^2 \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial t} = c \frac{\partial(\phi - \gamma)}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{\gamma} n p_z \right), \quad (4)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + a^2 + p_z^2}, \quad (5)$$

式中 n 为等离子体密度, n_0 为等离子体初始密度, e , m 分别为电子电量和电子质量, k_p ($= \omega_p / c = (4\pi e^2 n_0 / m_0)^{1/2} / c$) 为等离子体波数, 归一化量

$$a = \frac{eA}{m_0 c^2}, \quad \phi = \frac{e\Phi}{m_0 c^2}, \quad p = \frac{P}{m_0 c}.$$

为了方便起见, 采用另一组独立变量 ξ , τ , 其中 $\xi = z - ct$, $\tau = t$, 假设 $\tau_L \ll \tau_e$ (τ_L 为脉冲宽度, τ_e 为光脉冲包络演化的特征时间, $\tau_e \sim 2 \frac{n_0}{n} \gamma \omega / \omega_p^2$ [3,4]), 则在 (ξ, τ) 坐标系中, 等离子体流经一个近乎是定态的光脉冲(光脉冲形状随 τ 很缓慢地变化). 利用准稳态近似 [3-5], 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) a = k_p^2 \frac{a}{1 + \phi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{k_p^2}{2} \left(\frac{1 + a^2}{(1 + \phi)^2} - 1 \right). \quad (7)$$

将辐射场表示为

$$a = \frac{1}{2} \sum_m a_m e^{i k_m \xi}, \quad (8)$$

式中 $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, a_m 为第 m 阶谐波的包络, k_m 为第 m 阶谐波的波数. $a_m = a_{-m}^*$, $k_m = mk$, 这里 k 为入射激光的波数.

根据脉冲包络长度 L ($L = c\tau_L$) 与等离子体波长 λ_p 量值的关系, 考虑两种情况.

1) 在长脉冲区 ($L \gg \lambda_p$), 将标势分为慢变部分和快变部分之和, $\phi = \phi_s + \phi_f$, 因为 $\phi_s \gg \phi_f$, 得

$$\phi_s = \sqrt{1 + \frac{1}{2} a_L^2} - 1, \quad (9)$$

$$\phi_f = S e^{2ik\xi} + \text{c. c.}, \quad (10)$$

式中 $S = k_p^2 a_L^2 / (32 k^2 (1 + \phi_s)^2)$. 把这些表达式代入(5)和(6)式, 给出长脉冲条件下任意阶谐波的包络方程为

$$\frac{2ik_j}{c} \frac{\partial a_j}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left[a_j - \sum_p \sum_{m \neq j} \beta \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{j-m+4p}{2}} a_m a_1^{j-m+2p} (a_1^*)^{2p} \right], \quad (11)$$

式中 $\beta = \left(\frac{j-m+4p}{2} \right)! / p! \left(\frac{j-m+2p}{2} \right)!$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = 1, 3, 5, \dots$.

2) 在短脉冲区, ($L \ll \lambda_p$), $|\phi| \ll 1$, 这种情况下标势可解析求得

$$\phi = \frac{k_p}{8} \sum_{m,l} \int_{\xi}^0 d\xi' a_l a_m e^{i(l+m)k\xi'} \sin k_p(\xi - \xi'). \quad (12)$$

值得注意的是, $|\phi| \ll 1$ 仅在条件 $a_L \ll \frac{2\lambda_p}{\pi L}$ 适用, 这是准稳态近似所要求的. 将(12)式代入

(5)和(6)式,利用慢变包络近似

$$\frac{\partial^2 a_j}{\partial \xi^2} \ll k^2 a_j, \quad \frac{\partial^2 a_j}{\partial \tau^2} \ll \omega^2 a_j,$$

得到第 j 阶谐波的包络方程为

$$\frac{2ik_j}{c} \frac{\partial a_j}{\partial \tau} = k_p^2 a_j - \frac{k_p^3}{8} \sum_{m,l} a_{j-m-l} \left\langle \int_{\xi}^0 d\xi' a_l a_m e^{i(l+m)k(\xi'-\xi)} \sin k_p(\xi-\xi') \right\rangle, \quad (13)$$

式中 $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\langle \dots \rangle$ 表示仅取慢变部分.

3 相对论谐波辐射对参数的依赖性

为了计算方便,下面以三次谐波为例,讨论相对论相干谐波辐射对激光参数和等离子体参数的依赖性.

3.1 对激光强度的依赖性

由于长脉冲和短脉冲激光在等离子体中传播时对等离子体中电子运动的动力学行为产生的影响不同,因此两种条件下辐射的谐波特性有所不同,下面就长脉冲和短脉冲两种极限情况下谐波辐射进行说明.

1) 长脉冲激光辐射的谐波

由方程(11)得到三次谐波的演化方程为

$$\frac{6ik}{c} \frac{\partial a_{3l}}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1+\phi_s} a_{3l} - \frac{k_p^2 S}{(1+\phi_s)^2} a_{1l}^3, \quad (14)$$

$$\frac{2ik}{c} \frac{\partial a_{1l}}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1+\phi_s} a_{1l}. \quad (15)$$

方程(14)等号右边第一项来自于极化电流,导致逆色散(reactive dispersion),使得谐波失谐,最终导致谐波的饱和,在 Sprangle 的研究中,因其没有考虑该项而导致久期发散问题;等号右边第二项是谐波辐射的源,促使谐波辐射增长.求解上述耦合方程,得

$$a_{3l} = \frac{k_p^2 a_L^3}{128 k^2 (1+\phi_s)^3} \sin\left(\frac{4}{3} \varphi\right) e^{[\pi/2+13/6 \varphi]i}, \quad (16)$$

式中

$$\varphi = \frac{k_p^2}{k(1+\phi_s)}.$$

在刚开始的短时间内,谐波振幅线性增长,

$$a_{3l} = \frac{1}{3} \left(\frac{k_p}{4k} \right)^3 \frac{a_L^3}{(1+\phi_s)^4} \omega_p \tau. \quad (17)$$

一段时间后,由于谐波间的耦合而到达饱和,饱和振幅为

$$a_{3ls} = \frac{k_p^2 a_L^3}{128 k^2 (1+\phi_s)^3}. \quad (18)$$

将 $1+\phi_s = \sqrt{1+\frac{1}{2} a_L^2}$ 代入(18)式

$$a_{3\text{ls}} = \frac{k_p^2 a_L^3}{128 k^2 \left(1 + \frac{1}{2} a_L^2\right)^{3/2}}, \quad (19)$$

容易得到饱和时的转化效率

$$p_3 = 2^{-14} \left(\frac{k_p}{k}\right)^4 \frac{a_L^4}{\left(1 + \frac{1}{2} a_L^2\right)^3}. \quad (20)$$

求(20)式的极值发现,三次谐波的转化效率随抽运激光强度的变化有一个极大值,极值点落在 $a_L = 2$ 处,根据关系式

$$a_L = 8.5 \times 10^{-10} \lambda(\mu\text{m}) I_0^{1/2} (\text{W}/\text{cm}^2), \quad (21)$$

对波长为 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ 的激光,极值点对应的激光强度为 $I_0 = 4.9 \times 10^{18} \text{W}/\text{cm}^2$. 三次谐波的转化效率随抽运激光强度的变化示于图 1. 可以看出,更强的激光对提高转化效率没有帮助,最佳的转化效率需要一个适当的激光强度,其中原因有待进一步研究.

2) 短脉冲激光辐射的谐波

在短脉冲区,三次谐波的演化方程为

$$\frac{6ik}{c} \frac{\partial a_{3u}}{\partial \tau} = k_p^2 a_{3u} - \frac{k_p^3}{8} a_{1u} \left\langle \int_{\xi}^0 d\xi' a_{1u}^2 e^{2ik(\xi' - \xi)} \sin k_p(\xi' - \xi) \right\rangle, \quad (22)$$

$$\frac{2ik}{c} \frac{\partial a_{1u}}{\partial \tau} = k_p^2 a_{1u} (1 - \phi_{su}). \quad (23)$$

方程的推导中假定 $a_{j+1} \ll a_j$, 因而高阶项被略去, 式中

$$\phi_{su} = \frac{k_p}{8} \int_{\xi}^0 d\xi' a_{1u}^2 \sin k_p(\xi' - \xi).$$

由方程(22)和(23)可得出其形式解为

$$a_{3u} = \frac{ick_p^3}{6k} \int_0^{\tau} d\tau' S'_{3u}(\xi, \tau') \exp\left[-\frac{ck_p^2}{6k} i(\tau - \tau')\right], \quad (24)$$

式中

$$S'_{3u} = \frac{1}{8} a_{1u} \left\langle \int_{\xi}^0 d\xi' a_{1u}^2 e^{2ik(\xi' - \xi)} \sin k_p(\xi' - \xi) \right\rangle.$$

为了简便,略去 ϕ_{su} , 并考虑正弦脉冲激光

$$a_L = a_0 \sin \frac{\pi}{L} \xi, \quad (0 \leq \xi \leq L).$$

由(24)式得

$$a_{3u} = \frac{a_0^3}{64} \frac{k_p^2}{4k^2 - k_p^2} G(\xi, \tau) \sin\left(\frac{2k_p^2}{3k} c\tau\right) \exp\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5ck_p^2}{6k} \tau\right) i\right], \quad (25)$$

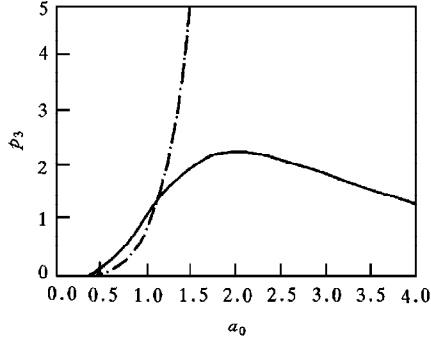


图 1 三次谐波的转化效率($\times 10^{-10}$)随归一化矢量 a_L 的变化曲线 $k_p = 0.4$, $k = 8.0$. — 为短脉冲区的三次谐波辐射

式中

$$G(\xi, \tau) = \left\{ 1 - \frac{-4k^2 + k_p^2}{-4k^2 + (2\pi/L)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right) \right\} \sin \frac{\pi}{L}\xi.$$

首先谐波线性增长

$$a_{3u} = \frac{a_0^3}{96} \frac{k_p^4}{(4k^2 - k_p^2)k} G(\xi, \tau) c\tau, \quad (26)$$

经失相时间 $L_d/c = 3\pi k/(4k_p^2)c$ 达到饱和

$$a_{3u} = \frac{a_0^3}{64} \frac{k_p^2}{4k^2 - k_p^2} G(\xi, \tau). \quad (27)$$

利用转化效率的定义, 得

$$P_{3u} = \frac{a_0^4}{64^2} \left(\frac{k_p^2}{4k^2 - k_p^2} \right)^2 G'^2, \quad (28)$$

式中

$$G'(\xi, \tau) = 1 - \frac{-4k^2 + k_p^2}{-4k^2 + (2\pi/L)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right).$$

在短脉冲区, (28)式表明三次谐波的转化效率与光强的平方成正比(见图 1), 但这种关系只能在条件

$$a \ll \frac{2\lambda_p}{\pi L} \quad (29)$$

下成立, 这是由 $\phi \ll 1$ 决定的, 从本质上是准静态近似 $\tau_L \gg \tau_e$ 的结果.

3.2 对激光脉冲形状的依赖

设抽运激光脉冲形状为

$$a_L = -\frac{a_0}{L}\xi, \quad -L \leq \xi \leq 0, \quad (30)$$

代入方程(24), 得

$$a'_{3u} = \frac{a_0^3}{8L} \frac{k_p^2 \xi^2}{4k^2 - k_p^2} \sin\left(\frac{2k_p^2}{3k} c\tau\right) e^{i\phi(\xi, \tau)}, \quad (31)$$

式中略去了低阶项 $O(1/k^2)$

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{\pi}{2} + \frac{5ck_p^2}{6k}\tau + \frac{4k}{(4k^2 - k_p^2)}\xi.$$

利用

$$\omega = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - c \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (32)$$

式中 Ψ 为激光场的总相位. 由(31)式易得

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, \quad (33)$$

式中

$$\Delta\omega_1 = \frac{5\omega_p^2}{6\omega}, \quad (34)$$

$\Delta\omega_1$ 与正弦脉冲激光产生的频移相等. 另外

$$\Delta\omega_2 = \frac{ck}{1 + k^2 \xi^2}, \quad (35)$$

当 $\xi = L$ 时

$$\Delta\omega_2 \approx \frac{c^2}{\omega L^2}, \quad (36)$$

达到饱和时, 其转化效率为

$$P'_{3u} = \frac{a_0^2}{64} \frac{k_p^4}{(4k^2 - k_p^2)^2} a_L^2. \quad (37)$$

为了探讨相对论谐波辐射对激光脉冲形状的依赖, 我们将正弦抽运激光和三角抽运激光辐射的三次谐波的转化效率进行了比较. 结果表明, 两种情况下的转化效率明显不同, 其区别示于图 2 (L_u 为超短脉冲包络长度). 另外, 从(33)式可以看出, 两种情况下谐波的频移亦不相同. 产生这些不同的原因在于脉冲形状影响激光作用在电子上的有质动力, 从而影响电子的动力学行为. 因此在实验中为有效获得谐波辐射, 应适当选择抽运激光的脉冲形状.

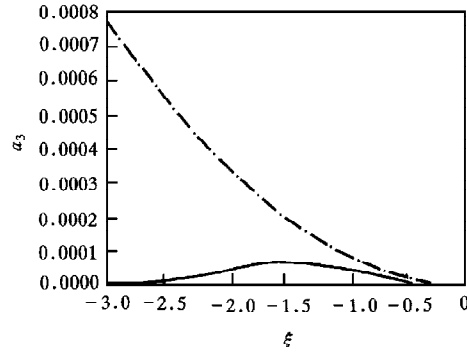


图 2 不同形状的脉冲激发的三次谐波辐射 $k_p = 0.4$, $k = 8.0$, $L_u = 3.0$, $a_0 = 1.5$. — 为正弦波脉冲, --- 为三角波脉冲

3.3 对激光脉冲宽度的依赖

抽运激光脉冲宽度的不同, 亦会导致谐波辐射的明显差别, 如谐波振幅随传播距离 ξ 的变化情况、转化效率, 以及失相长度等, 这也是有质动力的结果.

图 3 示出三次谐波振幅作为 ξ 的函数的变化情况, 在长脉冲区 ($L_l \gg \lambda_p$), 图中只画出一部分. 从图 3 可以看出, 在脉冲中部, 短脉冲区 ($L_u \ll \lambda_p$) 的谐波振幅比长脉冲区的更大, 且其曲线的变化率也更大.

在两个激光脉冲长度区, 其最大转化效率之比不难由前述结论得出

$$\frac{P_u}{P_l} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right)^3 \left(\frac{4k^2}{k_p^2 - 4k^2} \right), \quad (38)$$

式中 P_l , P_u 分别为长脉冲区和短脉冲区的最大转化效率. 当 $a_0 \geq 1.084$ 时, $P_u > P_l$, 这说明相对论强激光在等离子体中辐射的谐波在短脉冲区更有效. 作为例子, 考虑一束在欠稠密等离子体中传播的超强激光, 设等离子体密度满足 $\omega_p/\omega = 0.01$, 通过计算发现, 当 $a_0 = 3$ 时, 30 fs 激光辐射的三次谐波的转化效

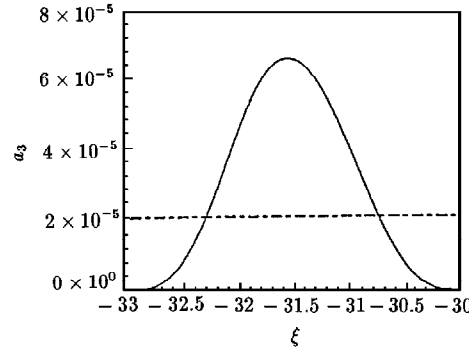


图 3 不同宽度的脉冲激发的三次谐波辐射 参数取值同图 2. — 为超短脉冲, --- 为长脉冲

率是 300 fs 激光的 42 倍, 即 $P_u \approx 42 P_l$.

在两个激光脉冲长度区, 相对论谐波的失相长度满足

$$\frac{L_{d_l}}{L_{d_u}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} a_0^2}, \quad (39)$$

式中 L_{d_l} , L_{d_u} 分别为长脉冲区和短脉冲区的失相长度. 当 $a_0^2 < 6$ 时, $L_{d_u} > L_{d_l}$.

3.4 对等离子体密度的依赖

在长脉冲区, 转化效率对等离子体密度的依赖关系可由(20)式得到

$$\frac{P_3}{P_1} = \alpha \left(\frac{n}{n_c} \right)^2, \quad (40)$$

式中

$$\alpha = 2^{-14} \frac{a_L^4}{\left(1 + \frac{1}{2} a_L^2 \right)^3}$$

只与激光强度有关. (40)式表明, 三次谐波的转化效率与等离子体密度的平方成正比, 因此越密的等离子体有利于相对论谐波辐射.

在短脉冲区, 转化效率对等离子体密度的依赖关系可由(28)式得到

$$\frac{P_3}{P_1} = \alpha' \left(\frac{n}{4n_c - n} \right)^2, \quad (41)$$

式中 α' 与激光的脉冲形状及强度有关. (41)式中, 转化效率随密度的变化较长脉冲的情况复杂, 其变化关系示于图 4. 一个值得注意的现象是, 当 $n = 4n_c$ 时出现共振, 辐射的谐波得到极大的加强.

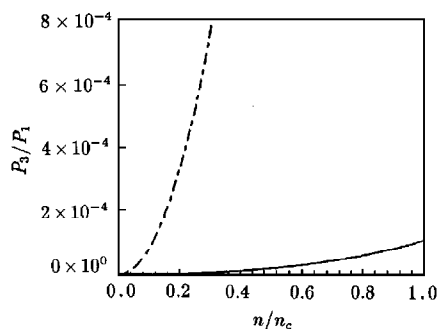


图 4 三次谐波辐射随等离子体密度的变化曲线 $\alpha = 0.008$, $\alpha' = 0.001$. — — 和 — 分别为长脉冲和短脉冲所激发的三次谐波辐射

4 结论与讨论

以上分析了相对论谐波辐射对每一个参数的依赖特性, 可得出结论: 为了获得尽可能高的谐波转化效率, 应该采用适当形状的短脉冲激光 ($L_u \ll \lambda_p$) 作为入射激光, 辐射较稠

密($n \sim 4 n_c$)的等离子体,且要求激光强度适当。

本文的分析是以准稳态近似为基础的,因此在欠稠密等离子体中能很好地成立,对于临界密度和稠密等离子体,所有结果只能定性地成立。目前对相对论谐波辐射的研究都是在小信号近似下进行的,这在谐波信号很弱时是可行的。实际上在欠稠密等离子体中谐波辐射的转化效率一般是很低的,例如,密度为 $n/n_c = 0.01$ 的等离子体,在超强激光($a = 2$)照射下的三次谐波的转化效率 $\eta = 10^{-8}$,因此谐波对电子运动的影响可以忽略。当谐波间的耦合很强时,如在稠密等离子体中,须考虑谐波对电子运动的反作用,这有待进一步研究。

- [1] W. L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions* (Addison-Wesley, New York, 1988).
- [2] G. Mourou, D. Umstadter, *Phys. Fluids*, **B4**(1992), 2315.
- [3] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 2011.
- [4] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 4463.
- [5] E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle *et al.*, *IEEE Trans. Plasmas*, **21**(1993), 95.
- [6] Gui-hua Zeng, Bai-fei Shen *et al.*, *Phys. Plasmas*, **3**(1996), 4220.
- [7] Zeng Gui-hua *et al.*, *Chin. Phys. Lett.*, **13**(1996), 31.
- [8] W. B. Mori, C. D. Decker, W. P. Leemans, *IEEE Trans. Plasmas*, **21**(1993), 110.
- [9] S. C. Wilks, W. L. Krue, W. B. Mori, *IEEE Trans. Plasmas*, **21**(1993), 120.

DEPENDENCE OF RELATIVISTIC HARMONIC RADIATION ON PARAMETERS OF LASER AND PLASMAS

DU CHUN-GUANG ZENG GUI-HUA XU ZHI-ZHAN

(*Labratory for High Intensity Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800*)

(Received 7 July 1997; revised manuscript received 20 April 1998)

ABSTRACT

The dependence of the relativistic harmonic radiation on the parameters of laser and plasmas is investigated. Results show that the intensity of incident laser, the length, the shape of the pulse, and the plasma density play an important role in the relativistic harmonic radiation. The results can provide scientific basis for experiments.

PACC: 5260; 5240D