第 48 卷 第 5 期 1999 年 5 月
1000-3290/1999/48(05)/0882-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 48, No. 5, May, 1999

NLS$^+$ 方程的平方 Jost 解的完备性*

陈世荣　　　　　　陈向军

(武汉大学物理系,武汉 430072)　(暨南大学物理系,广州 510632)

(1998 年 9 月 24 日收到)

对于 NLS$^+$ 方程相应的平方 Jost 函数的完备性,通过求得的广义 Marchenko 方程给出了证明,从而建立了含修正项的直接微扰理论.

PACC: 5235; 0230; 0340

1 引　　言

NLS$^+$ 方程它可以表为[1,2]

$$\mathrm{i}\, u_t - u_{xx} + 2(|u|^2 - \rho^2)u = 0, \tag{1}$$

这里 ρ 是一正常数.在求解时通常加上边界条件

$$u \to \rho, \text{当 } x \to +\infty \text{ 时}; \quad u \to \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}. \tag{2}$$

其中 α 是一个任意的常数.在反散射变换求解中,引入一对拉克斯方程,并且为了避免双值函数出现引入黎曼面造成的麻烦,引入一个辅助谱参数 ζ.随后证明了[3,4],透射振幅 $\alpha(\zeta)^{-1}$的极点,ζ_n,恒位于复 ζ 平面的以原点 O 为心,以 ρ 为半径的圆的上半圆弧上,而暗孤子解的相 α 由这些 ζ_n 的 角决定.这就是说,解中的两个常数 ρ 和 α 与 ζ_n 是有关的. ρ 和 α 这两个常数,刻划了暗孤子解的背景.

当存在修正项时,(1)式成为[5—8]

$$\mathrm{i}\, v_t - v_{xx} + 2(|v|^2 - \rho^2)v = \varepsilon r[v], \tag{3}$$

这里 ε 是一个小参数, $r[v]$是 v 的泛函.在求微扰解时,通常附加初值条件

$$v(x, t = 0) = u(x, t = 0). \tag{4}$$

这里 ζ_n 不可能保持常数,因为若那样,就是两个拉克斯方程都仍然有效,它们的相容性条件将给出不含修正项的方程.既然 ζ_n 将依赖于 t(在微扰方法中是一阶小量),那么 ρ 和 α 也将依赖于 t.对于含修正项的 NLS$^+$ 方程,背景会改变,而且是待定的,这使得试图建立以反散射变换为基础的微扰方法的尝试显然难以成功.于是近年来陆续出现了一些近似的处理方法,其特点都是围绕背景的处理.最早忽略背景的变化[5]或采取别种近似避开背景的变化[6],或者部分考虑背景的变化,对它的变化形式作一定假设[7,8].特别是,前不久出现了一篇忽略背景变化,简单套用 NLS 方程的直接微扰理论的 NLS$^+$ 方程的直接微

* 国家自然科学基金(批准号:19775037)和国家教委博士点基金资助的课题.

扰理论[8].这篇文章包含一系列的错误,也不可能用来处理任何实际问题.于是,建立正确的直接微扰理论就成为必要.

这方面的研究,本文作者之一在一组论文中[9—13],系统讨论了这一问题.在单暗孤子情况下,利用 Jost 解的显式,证明了平方 Jost 解的完备性[9].在此基础上,建立了暗孤子的直接微扰理论[10],考虑了平方 Jost 函数的约化关系,建立了单个暗孤子情况下单位元的展开式.通过让久期方程中来自暗孤子无穷大背景能量,按系统线度发散的部分互相抵销,证明了过去对局域微扰和非局域微扰对背景影响的假定:局域微扰不影响背景的模;非局域微扰则会导致背景的变化.因此得到了完整的计算绝热解的简单公式,并给出了计算一级修正的方法.作为应用,还具体处理了一系列暗孤子的典型微扰问题[11—13].

但是,这一理论推广到多个暗孤子情况的关键是证明这时平方 Jost 函数的完备性.我们看到对于 NLS 方程,及亮孤子情况下,相应于多个孤子时平方 Jost 解的完备性,最早是在解具有紧致台集(compact support)的假定下得到的[14].而对暗孤子解是不可能这样假定的.同时,也不可能像单个暗孤子解时那样利用 Jost 解的显式.因此,这是一个重要的,且十分困难的问题.我们发现,这一困难可以利用广义的 Marchenko 方程[15—17]的办法来解决.先将参考 KdV 方程的广义的 Marchenko 方程[15,16]和 NLS 方程的广义的 Marchenko 方程[17],得到 NLS^+ 方程的广义的 Marchenko 方程.然后在 δu 是一小量时(微扰理论中已经假定了它正比于 ε,因而是一小量),证明了平方 Jost 函数的完备性.这样,暗孤子的直接微扰理论就完整了.

2　单位元的分解

如果平方 Jost 函数 $\Psi(x,\zeta)$, $\Psi(x,\zeta_n)$ 和 $\dot{\Psi}(x,\zeta_n)$ 是完备的,在多个暗孤子情况下,单位元的分解式是

$$\begin{aligned}\delta(x-y)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta\frac{1}{a(\zeta)^2(1-\rho^2\zeta^{-2})}\Psi(x,\zeta)\Phi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\sigma_2)\\&-\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)^2(1-\rho^2\zeta_n^{-2})}\{\dot{\Psi}(x,\zeta_n)\Phi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\\&+\Psi(x,\zeta_n)\dot{\Phi}(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\}(\mathrm{i}\sigma_2)+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{2\rho^2\zeta_n^{-3}}{\dot{a}(\zeta_n)^2(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^2}\right.\\&\left.+\frac{\ddot{a}(\zeta_n)}{\dot{a}(\zeta_n)^3(1-\rho^2\zeta_n^{-2})}\right\}\Psi(x,\zeta_n)\Phi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\sigma_2).\end{aligned}\tag{5}$$

这里除了指标 n 外,所有符号都是通用的[9,10].

3　广义的 Marchenko 方程

由于 Jost 函数是完备的,即

$$\delta(x-y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\zeta)\psi(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)\,\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\sigma_1. \tag{6}$$

若有另一势 u',存在相应的 Jost 函数$(\tilde{\psi}'\psi')(x,\zeta)$.这时,透射振幅的极点的个数 N',位置 $\zeta'_{n'}$,以及 $c'_{n'}$和 $r'(\zeta)$都可能不同.这时,完备性条件是

$$\delta(x-y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}'(x,\zeta)\,\psi'(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r'(\zeta)\,\psi'(x,\zeta)\,\psi'(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\zeta'_{n'}\psi'(x,\zeta'_{n'})\,\psi'(y,\zeta'_{n'})^{\mathrm{T}}\sigma_1. \tag{7}$$

现在考虑核 $M(x,y)$.它把 Jost 函数$(\tilde{\psi}\,\psi)(x,\zeta)$变换到 Jost 函数$(\tilde{\psi}'\psi')(x,\zeta)$,

$$(\tilde{\psi}'\psi')(x,\zeta)=(\tilde{\psi}\;\psi)(x,\zeta)+\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}y M(x,y)(\tilde{\psi}\;\psi)(y,\zeta), \tag{8}$$

和核 $N(x,y)$给出逆变换

$$(\tilde{\psi}\;\psi)(x,\zeta)=(\tilde{\psi}'\psi')(x,\zeta)+\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}y N(x,y)(\tilde{\psi}'\psi')(y,\zeta). \tag{9}$$

利用(8)式将(6)式中的 $\psi(x,\zeta)$换成 $\psi'(x,\zeta)$,得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}'(x,\zeta)\,\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\zeta)\,\psi'(x,\zeta)\,\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_n\psi'(x,\zeta_n)\,\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\sigma_1=\delta(x-y)+\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}sM(x,s)\,\delta(s-y). \tag{10}$$

利用(9)式将(7)式中的 $\psi'(x,\zeta)^{\mathrm{T}}$ 换成 $\psi(x,\zeta)^{\mathrm{T}}$,得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}'(x,\zeta)\,\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r'(\zeta)\,\psi'(x,\zeta)\,\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\zeta'_{n'}\psi'(x,\zeta'_{n'})\,\psi(y,\zeta'_{n'})^{\mathrm{T}}\sigma_1=\delta(x-y)+\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}s\,\delta(x-s)\,\sigma_1N(x,s)^{\mathrm{T}}\sigma_1. \tag{11}$$

将(11)式减去(10)式,得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(r'(\zeta)-r(\zeta))\,\psi'(x,\zeta)\,\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1\mathrm{d}\zeta+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\zeta'_{n'}\psi'(x,\zeta'_{n'})\,\psi(y,\zeta'_{n'})^{\mathrm{T}}\sigma_1$$

$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_n\psi'(x,\zeta_n)\,\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\sigma_1$$

$$=-\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}sM(x,s)\,\delta(s-y)+\int_{y}^{\infty}\mathrm{d}s\,\delta(x-s)\,\sigma_1N(x,s)^{\mathrm{T}}\sigma_1. \tag{12}$$

当 $y>x$ 时,右端第二项为 0.如果再利用(8)式,消去此式中的 $\psi'(x,\zeta)$,就得到 NLS^+ 方程的广义的 Marchenko 方程

$$M(x,y)+\Omega(x,y)+\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}zM(x,z)\,\Omega(z,y)=0,\quad y>x, \tag{13}$$

这里

$$\Omega(x,y)=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n'}c'_{n'}\zeta'_{n'}\psi(x,\zeta'_{n'})\,\psi(y,\zeta'_{n'})^{\mathrm{T}}\sigma_1-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n}c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)\,\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\sigma_1$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta\{r'(\zeta)-r(\zeta)\}\psi(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\sigma_1. \tag{14}$$

4 平方 Jost 函数完备性的证明

类似于通常 NLS^+ 方程的解于 Marchenko 方程的核的关系,立即得到

$$\{u'(x)-\rho'\}-\{u(x)-\rho\}=-2M(x,x)_{12}, \tag{15}$$

$$\{\overline{u'(x)}-\rho'\}-\{\overline{u(x)}-\rho\}=-2M(x,x)_{21}. \tag{16}$$

当 $\delta u(x)=\{u'(x)-u(x)\}+\{\rho'-\rho\}$是小量时, $M(x,y)$和 $\Omega(x,y)$也将是小量,由广义的 Marchenko 方程得

$$M(x,y)\approx-\Omega(x,y). \tag{17}$$

同时,分离谱的能级 $N'=N$,但是 $\delta\zeta_n=\zeta_n'-\zeta_n$ 和 $\delta c_n=c_n'-c_n$ 仍要保留.所以

$$\begin{aligned}&c_n'\zeta_n'\psi(x,\zeta_n')\psi(y,\zeta_n')^{\mathrm{T}}-c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}\\&=\delta(c_n\zeta_n)\psi(x,\zeta_n)\psi(y,\zeta_n)^{\mathrm{T}}+c_n\zeta_n\delta\zeta_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\psi(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^{\mathrm{T}}\Big|_{\zeta=\zeta_n}.\end{aligned} \tag{18}$$

引入

$$\delta\hat{u}(x)\equiv\begin{pmatrix}\delta u(x)+\delta_\rho\\ \delta\overline{u(x)}+\delta_\rho\end{pmatrix}, \tag{19}$$

得到

$$\delta\hat{u}(x)=\begin{pmatrix}-2M_{12}(x,x)\\-2M_{21}(x,x)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

于是

$$\begin{aligned}\delta\hat{u}(x)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\delta r(\zeta)\Psi(x,\zeta)-\delta\tilde{r}(\zeta)\tilde{\Psi}(x,\zeta)\}\mathrm{d}\zeta\\&+\sum_{n=1}^{N}\{\delta(c_n\zeta_n)\Psi(x,\zeta_n)+c_n\zeta_n\delta\zeta_n\dot{\Psi}(x,\zeta_n)\}.\end{aligned} \tag{21}$$

方程(21)证明了在 $\delta u(x)$是小量时,

$$\frac{\delta\hat{u}(x)}{\delta r(\zeta)}\propto\Psi(x,\zeta),\quad\frac{\delta\hat{u}(x)}{\delta c_n}\propto\Psi(x,\zeta_n),\quad\frac{\delta\hat{u}(x)}{\delta\zeta_n}\propto\dot{\Psi}(x,\zeta_n) \tag{22}$$

构成完备的平方 Jost 函数集合.由于任何微扰理论,总是假定解的修正 $\delta u(x)$正比于小参数 ε,所以这里关于平方 Jost 函数的完备性的证明,对于直接微扰理论已经充分可用了.

感谢黄念宁教授的有益建议.

[1] V.E.Zakharov and A.B.Shabat, *Sov. Phys.*, **JETP 37**(1973), 823.
[2] A.Hasegawa and F.Tappert, *Appl. Phys. Lett.*, **23**(1973), 171.
[3] L.D.Faddeev and L.A.Takhtajan, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons(Springer-Verlag, Berlin, 1987).
[4] 黄念宁,孤子理论和微扰方法(上海科技教育出版社,上海,1996).

[5] J. A. Giannini and R. I. Joseph, *IEEE J. Quantum Electron*, **26**(1990), 2109.
[6] Y. S. Kivshar, *Opt. Lett.*, **15**(1990), 1273.
[7] I. M. Uzunov and V. S. Gerdjikov, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 1582.
[8] V. V. Konotop and V. E. Vekslerchik, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 2397.
[9] X. J. Chen, Z. D. Chen and N. N. Huang, *Progress in Natural Science*, **8**(1998), 672.
[10] X. J. Chen, Z. D. Chen and N. N. Huang, *J. Phys.*, **A31**(1998), 6929.
[11] X. J. Chen and Z. D. Chen, *IEEE J. Quantum Electron*, **34**(1998), 1308.
[12] X. J. Chen and Z. D. Chen, *Chinese Phys. Lett.*, **15**(1998), 504.
[13] X. J. Chen and Z. D. Chen, *J. Opt Soc. Am.*, **B15**(1998), 2738.
[14] D. J. Kaup, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**(1979), 849.
[15] H. E. Moses, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 2243.
[16] P. Deift and E. Trubowitz, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**(1979), 121.
[17] R. K. Dodd and R. K. Bullough, *Phys. Scripta.*, **20**(1979), 514.

COMPLETENESS RELATION OF SQUARED JOST FUNCTIONS TO THE NLS$^+$ EQUATION*

CHEN SHI-RONG
(*Department of Physics, Wuhan University, Wuhan* 430072)
CHEN XIANG-JUN
(*Department of Physics, Jinan University, Guangzhou* 510632)
(Received 24 September 1998)

ABSTRACT

Completeness relation of the squared Jost functions to the NLS$^+$ equation is proven by generalized Marchenko equation derived in this note. Hence the direct perturbation theory for dark multi-solitons is performed.

PACC: 5235; 0230; 0340

*Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19775037) and by the Doctoral Program Foundation of the National Education Commission of China.