第 48 卷 第 5 期 1999 年 5 月
1000-3290/1999/48(05)/0887-11
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.48, No.5, May, 1999

KdV 方程的直接微扰方法*

陈芝得[1)2)] 陈世荣[1)] 黄念宁[1)]

[1)](武汉大学物理系,武汉 430072)

[2)](广州师范学院物理系,广州 510400)

(1998 年 9 月 29 日收到)

系统地讨论了含修正项的 KdV 方程的直接微扰方法.从反散射变换所得的不含修正项方程的严格多孤子解出发,导出了线性化算子的零本征值的所有本征函数——平方 Jost 函数.引入了它们所对应的伴随函数和定义了内积.计算了应有的正交关系,并自然得到单位元的平方 Jost 函数的展开式.利用广义的 Marchenko 方程,证明了平方 Jost 函数的完备性.同时得到展开式中的积分是沿实轴从 $-\infty$ 到 ∞,但在原点附近将从上方绕过.这不同于过去所得的 Cauchy 主值积分.为最明确显示这一差别,在单孤子情况下又用平方 Jost 函数的显式,直接作了验证.同时指出,以前由于取 Cauchy 主值积分导出的 KdV 方程所特有的孤子尾,在采用从上方绕过原点的积分时,则事实上并不存在.

PACC: 5235; 0230; 0340

1 引 言

近可积分系统的微扰理论对实际物理问题的应用是十分重要的[1].对于含修正项的 KdV 方程的种种不同的微扰理论中[2—9],直接微扰理论被认为比较简单[6—9],因为它可以不依赖于可积分系统的反散射变换理论来建立.但是从解决问题来说,强调这点似乎并不是必要的.最早关于含修正项的 NLS 方程的直接微扰理论[10],完全是在反散射变换理论基础上建立的.特别是,撇开反散射变换,对于多孤子的情况来建立直接微扰理论,将出现本来可以避免的不必要的麻烦.由于含修正项的 KdV 方程的直接微扰理论一直存在种种不能令人满意的地方,直到最近仍有论文来讨论[11—13].事实上,直接微扰理论的最本质之处在于清楚地引入久期条件,定出谱参数的由于修正项引起的变化.

本文在前人的主要是针对单孤子情况建立的含修正项的 KdV 方程的直接微扰理论[6—9]的基础上,建立多孤子情况下含修正项的 KdV 方程的直接微扰理论.这里将以不含修正项的 KdV 方程的反散射变换的多孤子结果为出发点,在导出了线性化算子的零本征值的所有本征函数——平方 Jost 函数之后,引入了它们所对应的伴随函数,和定义了内积.计算了应有的正交关系,并自然得到单位元的平方 Jost 函数的展开式.过去只在单孤子情况下,利用本征函数解的显式和留数计算得证的解的完备性[11].本文利用广义的

* 国家自然科学基金(批准号:1977530)和国家教委博士点基金资助的课题.

E-mail: zhide@gitic.com.cn

Marchenko 方程[14,15]，证明了多孤子情况下平方 Jost 函数的完备性.得到展开式中的积分是沿实轴从 $-\infty$ 到 ∞，并且在原点附近将从上方绕过.这不同于过去所得的取 Cauchy 主值积分.为最明确显示这一差别，在单孤子情况下又用平方 Jost 函数的显式，直接验证了这里的结果.

在文献[3,5—9,11—13]中，由取 Cauchy 主值积分导出的 KdV 方程的孤子尾，曾被认为是 KdV 孤子在存在微扰时典型的特征，这里证明了在采用正确的积分从原点上方绕过后，事实上并不存在.所用的证明方法恰恰是在文献[3,5]中用来证明 MKdV 孤子和 NLS 孤子在存在微扰时不存在孤子尾的同一方法.

2 线性化算子

含修正项的 KdV 方程可以写作

$$v_t - 6vv_x + v_{xxx} = \varepsilon r[v], \tag{1}$$

式中 $r[v]$ 为 v 的泛函，ε 为一个小的实参数.考虑初条件

$$v(x, t = 0) = u(x, t = 0), \tag{2}$$

这里 $u(x, t)$ 是不含修正项的 KdV 方程的孤子解.为了在如上初条件下求以 ε 为小参数的近似解，假定[10]

$$v = u^a + \varepsilon q, \tag{3}$$

这里 u^a 是所谓绝热解，它在函数形式上与严格解一样，但是其中所含的参数可以有 ε 阶的对 t 的相依.εq 是准至 ε 阶的修正的其余部分.将(3)式代入(1)式，可以得到

$$\{\partial_t + L(u, x)\}q = R[u], \tag{4}$$

这里 $L(u, x)$ 是所谓的线性化算子

$$L(u, x) = -6\partial_x u + \partial_x^3, \tag{5}$$

$R[u]$ 由下式给定：

$$R[u] = r[u] - s[u],\ s[u] = \frac{1}{\varepsilon}\{u_t - 6uu_x + u_{xxx}\}. \tag{6}$$

我们注意(4)式是 ε 阶的方程，所以方程的左端的 u 和右端第一项 $r[u]$ 中的 u 是严格解，右端第二项 $s[u]$ 中的 u 是绝热解.这就是说，此 u 中的参数可以有 ε 阶的对 t 的依赖.$s[u]$ 又可以写作

$$s[u] = u_\tau, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{7}$$

初条件这时为

$$q(x, t = 0) = 0. \tag{8}$$

这样，(1)式在初条件(2)式下的求微扰解化成了(4)式在初条件(8)式下求 q.

3 平方 Jost 函数

KdV 方程对应的 Lax 方程是

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\right\}w(x,t,k)=k^2 w(x,t,k) \tag{9}$$

和

$$\partial_t w(x,t,k)=\left\{-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6u\frac{\partial}{\partial x}+3u_x\right\}w(x,t,k), \tag{10}$$

式中 k 是谱参数, $w(x,t,k)$由于满足两个 Lax 方程, 以下称为完全的 Jost 函数. 经过直接的演算, 从此两式可以得到

$$\{\partial_t+L(u,x)\}W(x,t,k)_x=0, \tag{11}$$

这里 $W(x,t,k)=w(x,t,k)^2$ 称为完全的平方 Jost 函数.

通常的 Jost 函数 $\psi(x,k)$, $\phi(x,k)$, $\widetilde{\phi}(x,k)$和 $\widetilde{\psi}(x,k)$满足第一个 Lax 方程(9)和适当的边界条件, 如果再适当地乘以由第二个 Lax 方程决定的时间因子 $h(t,k)=e^{-i4k^3t}$, 就得到完全的 Jost 函数的表示式为

$$\begin{aligned}&h(t,k)\varphi(x,k), \quad h(t,k)^{-1}\widetilde{\varphi}(x,k),\\&h(t,k)\widetilde{\psi}(x,k), \quad h(t,k)^{-1}\psi(x,k).\end{aligned} \tag{12}$$

因此, 完全的平方 Jost 函数 $W(x,t,k)$的表示式为

$$\begin{aligned}&h(t,k)^2\Psi(x,k), \quad h(t,k)^{-2}\widetilde{\Psi}(x,k),\\&h(t,k)^2\widetilde{\Phi}(x,k), \quad h(t,k)^{-2}\Phi(x,k).\end{aligned} \tag{13}$$

这里

$$\Psi(x,k)=\psi(x,k)^2, \tag{14}$$

等等是通常的平方 Jost 函数.

将(13)式代入(11)式, 得

$$\{i\partial_t-L(u)\}\Psi(x,k)_x=4k^2\Psi(x,k)_x \tag{15}$$

等. 对于束缚态, $k=k_n$, k_n 是复 k 的上半平面虚轴上的点, 由上式得

$$\{i\partial_t-L(u)\}\Psi(x,k_n)_x=4k_n^2\Psi(x,k_n)_x. \tag{16}$$

我们还有

$$\{i\partial_t-L(u)\}\dot{\Psi}(x,k_n)_x=4k_n^2\dot{\Psi}(x,k_n)_x+8k_n\Psi(x,k_n)_x, \tag{17}$$

这里

$$\dot{\Psi}(x,k_n)\equiv\frac{d}{dk}\Psi(x,k)\bigg|_{k=k_n}. \tag{18}$$

注意, $\dot{\Psi}(x,k_n)_x$ 并不是算子$\{i\partial_t-L(u)\}$的本征函数, 但是在以后讨论完备性时要用到. 同理, 对 $\Phi(x,k)_x$ 等有相应的式子. 以下对 $\Psi(x,k)_x$ 等都简称为平方 Jost 函数.

4　正交关系

内积和伴随函数的定义之本质是平方 Jost 函数和它的伴随函数的内积, 在连续谱时正比于 δ 函数. 参考以前的工作, 这里直接定义内积

$$\langle \Psi(k') | \Psi(k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Psi^A(x, k') \Psi(x, k)_x, \tag{19}$$

式中伴随函数的定义是

$$\Psi^A(x, k') = \Phi(x, k'). \tag{20}$$

注意，它不带对 x 的微商. 分部积分后(19)式成为

$$\langle \Psi(k') | \Psi(k) \rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x W[\Phi(x, k'), \Psi(x, k)], \tag{21}$$

这里 W[…]是通常的 Wronski 行列式.

由第一个 Lax 方程，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[\varphi(x, k'), \psi(x, k)]^2 = (k^2 - k'^2) W[\Phi(x, k'), \Psi(x, k)]. \tag{22}$$

所以有

$$\langle \Psi(k') | \Psi(k) \rangle = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2(k^2 - k'^2)} W[\varphi(x, k'), \psi(x, k)]^2 \Big|_{-L}^{L}. \tag{23}$$

对于实数 k 和 k'应换成 $k + \mathrm{i}0$ 和 $k' + \mathrm{i}0$，同时(23)式中的极限应取 Cauchy 主值. 我们得到

$$\langle \Psi(k') | \Psi(k) \rangle = \mathrm{i}2\pi k a^2(k) \delta(k - k'). \tag{24}$$

因为(22)式对上半平面的 k 成立，我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}k^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[\varphi(x, k'), \psi(x, k)]^2 \Big|_{k = k' = k_n} = 4k_n W[\Phi(x, k_n), \dot{\Psi}(x, k_n)]. \tag{25}$$

积分得

$$\langle \Psi(k_m) | \dot{\Psi}(k_n) \rangle = \langle \dot{\Psi}(k_m) | \Psi(k_n) \rangle = k_n \dot{a}(k_n)^2 \delta_{mn}. \tag{26}$$

将算子$\left\{\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}k^3} + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k'}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}k^2}\right\}$作用于(22)式，取 $k = k' = k_n$，再积分，得

$$\langle \dot{\Psi}(k_m) | \dot{\Psi}(k_n) \rangle = \dot{a}(k_n) \ddot{a}(k_n) k_n \delta_{mn} + \dot{a}(k_n)^2 \delta_{mn}. \tag{27}$$

(24)，(26)和(27)式就是所要的正交关系.

5 单位元的展开式

下面将证明 $\Psi(x, k)_x$, $\Psi(x, k_n)_x$ 和 $\dot{\Psi}(x, k_n)_x$ 是完备的，所以任意一个态 $q(x)$ 可以展开为

$$q(x) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k f(k) \Psi(x, k)_x + \sum_{n=1}^{N} \{ f_n \Psi(x, k_n)_x + g_n \dot{\Psi}(x, k_n)_x \}. \tag{28}$$

以 $\Psi(x, k)^A$, $\Psi(x, k_n)^A$ 和 $\dot{\Psi}(x, k_n)^A$ 乘上式，再积分，由正交关系可以得到 $f(k)$, f_n 和 g_n 的表示式. 把它们再代入(28)式，得到

$$\delta(x - y) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{\Gamma} \mathrm{d}k \frac{1}{ka(k)^2} \Psi(x, k)_x \Phi(y, k)$$

$$
-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k_n\dot{a}(k_n)^2}\left\{\frac{1}{k_n}+\frac{\ddot{a}(k_n)}{\dot{a}(k_n)}\right\}\Psi(x,k_n)_x\Phi(y,k_n)
$$

$$
+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k_n\dot{a}(k_n)^2}\{\dot{\Psi}(x,k_n)_x\Psi(y,k_n)+\Psi(x,k_n)_x\dot{\Phi}(y,k_n)\}. \tag{29}
$$

这里,实数的 k 要换成 $k+\mathrm{i}0$,所以被积函数中的 k^{-1}要换成$(k+\mathrm{i}0)^{-1}$,它的极点 $k=0-\mathrm{i}0$ 在下半平面.这说明上式中的积分路径 Γ 是沿实轴从 $-\infty$ 到∞,但在原点附近要从上方绕过.过去的工作[3,5—9,11—13]都是在原点处取 Cauchy 主值.这一区别影响微扰效应在连续谱时的结果.下面将更进一步讨论.(29)式就是单位元的分解式.

6 广义的 Marchenko 方程

为了证明(29)式,需要证明平方 Jost 函数是完备的.这可以由广义的 Marchenko 方程[14,15]来证明.对于势 u,有 Marchenko 方程和 Jost 函数的完备性关系

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r(k)\psi(x,k)\psi(y,k)+\tilde{\psi}(x,k)\psi(y,k)\}
$$

$$
+\sum_{n=1}^{N}c_n\psi(x,k_n)\psi(y,k_n)=\delta(x-y). \tag{30}
$$

对另一势 u',我们有

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r'(k)\psi'(x,k)\psi'(y,k)+\tilde{\psi}'(x,k)\psi'(y,k)\}
$$

$$
+\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\psi'(x,k'_{n'})\psi'(y,k'_{n'})=\delta(x-y). \tag{31}
$$

这里 $r(k)$, c_n 等是通常的记号.考虑积分核 $M(x,y)$,使

$$
\psi'(x,k)=\psi(x,k)+\int_x^{\infty}\mathrm{d}yM(x,y)\psi(y,k), \tag{32}
$$

和它的逆 $N(x,y)$,使

$$
\psi(x,k)=\psi'(x,k)+\int_x^{\infty}\mathrm{d}yN(x,y)\psi'(y,k). \tag{33}
$$

利用(32)式将(30)式中的 $\psi(x,k)$换成 $\psi'(x,k)$,注意 $\tilde{\psi}(x,k)=\overline{\psi(x,\bar{k})}$,得

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r(k)\psi'(x,k)\psi(y,k)+\tilde{\psi}'(x,k)\psi(y,k)\}
$$

$$
+\sum_{n=1}^{N}c_n\psi'(x,k_n)\psi(y,k_n)=\delta(x-y)+\int_x^{\infty}\mathrm{d}sM(x,s)\delta(s-y). \tag{34}
$$

类似地,利用(33)式,则(31)式成为

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r'(k)\psi'(x,k)\psi(y,k)+\tilde{\psi}'(x,k)\psi(y,k)\}
$$

$$
+\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\psi'(x,k'_{n'})\psi(y,k'_{n'})=\delta(x-y)+\int_y^{\infty}\mathrm{d}s\delta(x-s)N(s,y). \tag{35}
$$

(35)式减(34)式,当 $y>x$ 时,得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r'(k)-r(k)\}\psi'(x,k)\psi(y,k)$$

$$+\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\psi'(x,k'_{n'})\psi(y,k'_{n'})-\sum_{n=1}^{N}c_n\psi'(x,k_n)\psi(y,k_n)=-M(x,y). \tag{36}$$

再用一次(32)式,得广义的 Marchenko 方程

$$\Omega(x,y)+M(x,y)+\int_x^{\infty}\mathrm{d}sM(x,s)\Omega(s,y)=0,\quad y\geqslant x, \tag{37}$$

这里

$$\Omega(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\{r'(k)-r(k)\}\psi(x,k)\psi(y,k)$$

$$+\sum_{n'=1}^{N'}c'_{n'}\psi(x,k'_{n'})\psi(y,k'_{n'})-\sum_{n=1}^{N}c_n\psi(x,k_n)\psi(y,k_n). \tag{38}$$

这些结果已经得出[14,15].

7 平方 Jost 函数的完备性

由广义的 Marchenko 方程(37),当 $\delta u(x)=u'(x)-u(x)$是小量时,可以假定 $N=N'$和 $\delta r(k)=r'(k)-r(k)$等也是小量,于是得到

$$\Omega(x,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\delta r(k)\Psi(x,k)+\sum_{n=1}^{N}\{\delta c_n\Psi(x,k_n)+c_nk_n\dot{\Psi}(x,k_n)\}. \tag{39}$$

因此我们有

$$\delta u(x)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M(x,x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Omega(x,x). \tag{40}$$

由此两式得到 $\delta u(x)$可以用 $\Psi(x,k)_x$, $\Psi(x,k_n)_x$ 和 $\dot{\Psi}(x,k_n)_x$,这就证明了平方 Jost 函数是完备的.

8 久期条件

设(4)式中的未知函数 q 可以如(28)式那样展开,代入(4)式后得到一个方程.用 $\Psi(x,k_n)^A$ 乘,再积分,得到

$$k_n\dot{a}(k_n)^2\{g_{nt}-\mathrm{i}8_n^3g_n\}=\langle\Psi(k_n)|R\rangle. \tag{41}$$

虽然 g_n 的初值为 0,但是若上式右端不为 0, g_n 仍将随 t 的增大而无限增大[6—13].按通常的作法[6—13],我们要求它为 0,

$$\langle\Psi(k_n)|R\rangle=0. \tag{42}$$

同理,计算与 $\dot{\Psi}(x,k_n)^A$ 的内积,我们要求

$$\langle\dot{\Psi}(k_n)|R\rangle=0 \tag{43}$$

以保证 f_n 不致无限增大.这两方程就是久期条件.利用它们可以完全决定绝热解中的参数随 t 的准至 ε 的变化.我们知道 N 孤子解有 2N 个参数,(42)和(43)式正好在 N 孤子

情况有 2N 个方程.所以将完全决定这些参数随 t 的 ε 阶的修正.

最后,计算与 $\Psi(x,k)^A$ 的内积,得

$$ka(k)^2\{f_t(k)-\mathrm{i}8k^3f(k)\}=\langle\Psi(k)|R\rangle. \tag{44}$$

在已经决定了绝热解后,上式右端是完全确定了的,所以解出它来就可以得到 f,从而得到 q.

9 单孤子情况下的验证

在单孤子情况下,可以得到Jost函数的显式.我们可以直接验算完备性关系.由于这时

$$a(k)=\frac{k-k_1}{k-\bar{k}_1},\quad \dot{a}(k_1)=-\mathrm{i}\frac{1}{2|k_1|},\quad \ddot{a}(k_1)=\frac{1}{2|k_1|^2}. \tag{45}$$

于是单位元的展开(29)式简化为

$$\delta(x-y)=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_\Gamma\mathrm{d}k\frac{1}{ka(k)^2}\Psi(x,k)_x\Phi(y,k)+\frac{1}{k_1\dot{a}(k_1)^2}\{\dot{\Psi}(x,k_1)_x\Phi(y,k_1)+\Psi(x,k_1)_x\dot{\Phi}(y,k_1)\}. \tag{46}$$

容易看出

$$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}kA(x,y,k)=\delta(x-y), \tag{47}$$

这里 $A(x,y,k)=\mathrm{i}2e^{\mathrm{i}2k(x-y)}$.(46)式右端的第一项减去(47)式得

$$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_\Gamma\mathrm{d}k\left\{\frac{1}{ka(k)^2}\Psi(x,k)_x\Phi(y,k)-A(x,y,k)\right\}. \tag{48}$$

在 $x>y$ 时,极限 $|k|\to\infty$ 下,上式的被积函数趋于

$$O(|k|^{-1})e^{\mathrm{i}2k(x-y)}. \tag{49}$$

所以,可以添加一个在上半平面半径充分大的半圆弧作成一个逆时针方向的回路积分.在 k_1 附近,有

$$\frac{1}{a(k)^2}=\frac{1}{\dot{a}(k_1)^2(k-k_1)^2}-\frac{\ddot{a}(k_1)}{\dot{a}(k_1)^3(k-k_1)}+\cdots. \tag{50}$$

所以 k_1 点对回路积分的贡献是

$$-\frac{1}{\dot{a}(k_1)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left\{\frac{1}{k}\Psi(x,k)_x\Phi(y,k)\right\}\bigg|_{k=k_1}+\frac{\ddot{a}(k)}{\dot{a}(k_1)^3}\Psi(x,k_1)_x\Phi(y,k_1)$$

$$=-\frac{1}{k_1\dot{a}(k_1)^2}\{\dot{\Psi}(x,k_1)_x\Phi(y,k_1)+\Psi(x,k_1)_x\dot{\Phi}(y,k_1)\}, \tag{51}$$

这里用到(45),(51)式正好与(46)式右端第二项抵消.所以(46)式此时等于 $\delta(x-y)$.

如果像文献[6—9,11—13],(46)式的右端取主值积分,则右端将多出在 $k=0$ 处被积函数的留数的一半,即这时右端为

$$\delta(x-y)+\Psi(x,0)_x\Phi(y,0), \tag{52}$$

它当然不等于 $\delta(x-y)$. 当 $x\leqslant y$, 也有同样的结论. 所以可以断定过去的结论是不正确的.

10 有耗散微扰时 KdV 孤子也不存在孤子尾

在所得的平方 Jost 函数的完备性的表述中, 清楚地看到式中对谱参数 k 的积分是沿实轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$, 而在原点附近要从它的上方绕过. 过去对单孤子情况的工作, 不论是直接微扰理论[6—9,11—13], 还是以反散射变换为基础的微扰理论[3,5], 都是在原点处取主值. 由于这一区别是被积函数在原点处的留数的一半, 是不可忽略的. 因而这一区别将导致孤子在微扰作用下连续谱的贡献不同.

为了说明这点, 考虑耗散问题. 在单孤子情况修正项简单是 $-\varepsilon u_1$. 由于 $k_1=\mathrm{i}\kappa_1$, $\kappa_1>0$, 这时绝热解是[8,9,11,12]

$$u^a(x,k_1)=-2\kappa_1^2\operatorname{sech}^2 Z,\quad Z=\kappa_1 z,\quad z=x-\hat{x},\tag{53}$$

这里

$$\kappa_1(t)=\kappa_{10}\mathrm{e}^{-2\varepsilon t/3},\quad \hat{x}(t)=\frac{3}{\varepsilon}\{\kappa_{10}-\kappa_1(t)\}+x_0,\tag{54}$$

κ_{10}和 x_0 是常数. 当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\kappa_1=\kappa_{10},\ \hat{x}=4\kappa_{10}^2 t+x_0.\tag{55}$$

我们得到

$$\mathrm{R}[u_1]=-u_1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_1^a.\tag{56}$$

注意$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_1^a$ 可以表为 $\Psi(x,k_1)_x$ 和 $\dot{\Psi}(x,k_1)_x$ 的组合. 由正交关系, 对于(44)式的右端, 上式后一项没有贡献. 我们有

$$\langle\Psi(k)\,|\,\mathrm{R}[u_1]\rangle=2\kappa_1^2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k(x_1+4\kappa_1^2 t)}}{(k+\mathrm{i}\kappa_1)^2}\Xi(k),\tag{57}$$

这里

$$\Xi(k)=\kappa_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Z\left(\frac{k}{\kappa_1}-\mathrm{i}\tanh Z\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kZ/\kappa_1}\operatorname{sech}^2 Z.\tag{58}$$

由文献[12,16], 可以得到

$$\Xi(k)=-\frac{2\pi}{3}k(k^2+\kappa_1^2)\left(\kappa_1^2\sinh\left(\pi\frac{k}{\kappa_1}\right)\right)^{-1}.\tag{59}$$

可见, $\Xi(k)$有二个一阶零点 $k=\pm\mathrm{i}\kappa_1$, 注意 $k=0$ 并不是零点,

$$\Xi(0)=-\frac{2\kappa_1}{3}.\tag{60}$$

将(57)式代入(44)式, 得

$$f_t(k)-\mathrm{i}8k^3 f(k)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}8k^3 t}2\kappa_1^2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kx_1}}{(k-\mathrm{i}\kappa_1)^2}\Xi(k).\tag{61}$$

除了因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}8k\kappa_1^2 t}$外右端独立于 t. 在初条件 $f(k)|_{t=0}=0$ 下解出得

$$f(x,t)=-\frac{e^{i8k^3t}-e^{-i8k\kappa_1^2t}}{-i8k(k^2+\kappa_1^2)}2\kappa_1^2\frac{e^{-i2kx_1}}{(k-i\kappa_1)^2}\Xi(k). \tag{62}$$

$f(x,t)$有一个一阶极点 $k=-i0$ 和一个二阶极点 $k=i\kappa_1$,后者来源于 k^{-1}换为$(k+i0)^{-1}$.结果一阶修正是

$$q(x,t)=\frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma dkf(k)\Psi(x,k)_x. \tag{63}$$

以前的工作[3,5,12]认为(63)式的积分是主值积分,当$|x|\gg 1$时,对上式所作的近似是被积函数的主要贡献来自 $k=0$ 的附近区域.现在是从原点上方绕过,自然不能采用以前所用的近似.实际上

$$\Psi(x,k)_x=\left(\frac{k+i\kappa_1\text{th}Z}{k+i\kappa_1}\right)^2 i2ke^{i2kx}-2\frac{k+i\kappa_1\text{th}Z}{k+i\kappa_1}\frac{i\kappa_1^2\text{sech}^2Z}{(k+i\kappa_1)^2}e^{i2kx}, \tag{64}$$

在 $x\gg 1$ 时,第二项可以略去,这时有

$$\Psi(x,k)_x\approx i2ke^{i2kx}. \tag{65}$$

当$|k|\gg 1$,(62)式趋于

$$|f(x,t)|=O(|k|^{-2}). \tag{66}$$

所以(63)式的被积函数趋于

$$O(|k|^{-1})e^{i2kx}. \tag{67}$$

这时(63)式可以添加复 k 的上半平面有一个半径充分大的半圆弧,而成为一个回路积分.回路内只有一个二阶极点 $k=i\kappa_1$,可以求出这时的(63)式.结果是

$$O(1)e^{-2\kappa_1x}\approx 0,\quad \text{当 } x\gg 1. \tag{68}$$

所以当 $x\gg 1$ 时,$q(x,k)\approx 0$.

当$-x\gg 1$ 时

$$\Psi(x,k)_x\approx i2ke^{i2kx}\frac{(k-i\kappa_1)^2}{(k+i\kappa_1)^2}. \tag{69}$$

代入可见,这时(63)式的被积函数在$|k|\gg 1$ 仍具有如(67)式那样的性质.由于$-x\gg 1$,可以添加复 k 的下半平面有一个半径充分大的半圆弧,而成为一个回路积分.这里有一个二阶极点 $k=-i\kappa_1$.结果是

$$O(1)e^{2\kappa_1x}\approx 0,\quad \text{当 } -x\gg 1. \tag{70}$$

对于 $k=-i0$ 点.这时由于近似表示式(69)中的 k 因子而消去,那里的留数为零.所以最后的结果是当$-x\gg 1$ 时,$q(x,t)\approx 0$.

因此,$|x|\gg 1$ 时,$q(x,t)\approx 0$,即不存在孤子尾,值得一提的是,这里的证法正是 Karpman 和 Maslov 用来证明 MKdV 孤子和 NLS 孤子当存在修正项时不存在孤子尾同样的证法[3,5].

11 结　　语

直接微扰方法用来研究含修正项的 KdV 方程已有多年[3,5—9],由于存在某些未能很好解决的问题,最近又作了重新处理[11—13].按文献[12]的作法,在单孤子的情况下,将线

性化算子利用时空变换化为具有分离的时空变量的算子形式,求出此算子的本征函数,引入伴随算子和求出伴随函数.然后计算正交关系和利用留数算法证明所需的函数的完备性.这样就基本解决了过去遗留的问题.然而上述工作都是针对单孤子的情况.本工作的目的是将直接微扰方法推广到多孤子的情况.

首先放弃只适用于单孤子情况的对线性化算子的分离变量的要求[12],发现推广到多孤子情况的关键是相应的完备性的证明.在文献[6—9,12,13]的框架内,这一证明是相当困难的.但是,如果从 KdV 方程的广义的 Marchenko 方程[14,15]出发,利用解的变分算法,就可以简单地得到平方 Jost 函数的完备性.其余验证平方 Jost 函数是线性化算子的本征函数,引入伴随函数和算出正交关系,都是简单的.利用正交关系和完备性,不难得到单位元的分解式.这样就在多孤子情况下建立了 KdV 方程的直接微扰方法.

在所得的平方 Jost 函数的完备性的表述中,清楚地看到式中对谱参数 k 的积分是沿实轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 而在原点附近要从它的上方绕过,而过去对单孤子情况的工作,则在原点处都取主值[6—9,11—13].由于这一区别是被积函数在原点处的留数的一半,是不可忽略的,因而这一区别将导致孤子在微扰作用下在远处完全不同的渐近行为.因为这一点特别重要,所以便利用了单孤子情况下 Jost 解的显式直接验证了此积分的确应当从原点上方绕过.

众所周知,在以反散射变换为基础的微扰方法[3,5]对此也是取主值.由于这点,在文献[3,5]中算出了 KdV 方程的孤子在微扰作用下在远处出现了一个非零的部分,被称为孤子尾,而别的方程,如 MKdV 方程和 NLS 方程,相应的孤子在微扰作用下却没有这样的孤子尾.这在当时被认为是 KdV 方程特有的现象.本工作说明了以前的结果是有疑问的.简单的近似会得出不正确的结论.

我们的结论与文献[3,5—9,11—13]的不同,来源于证明了积分路径从上方绕过原点,而以前的工作沿用了取主值积分的错误结论.关于积分路径的选取的失误,同样出现在暗孤子的微扰理论中,在文献[17]中,取了主值积分引导到错误的结论.这在文献[18]中,已给出了完整的改正,并建立了正确的暗孤子微扰理论.

[1] Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989), 763.

[2] D. J. Kaup, SIAM *J. Appl. Math.*, **31**(1976), 121.

[3] V. I. Karpman, JEPT *Lett.*, **25**(1977), 271.

[4] D. C. Kaup and A. C. Newell, *Proc. R. Soc.*, **361A**(1978), 413.

[5] V. I. Karpman and E. M. Maslov, *Sov. Phys.* JETP, **48**(1978), 252.

[6] S. Watanabe, J, *Phys. Soc. Jpn.*, **45**(1978), 276.

[7] M. Tanaka, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49**(1980), 807.

[8] G. Reinisch and C. Fernandez, *Phys. Rev.*, **B24**(1981), 835.

[9] R. L. Sacks, SIAM *J. Math. Anal.*, **14**(1984), 674.

[10] D. J. Kaup, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**(1976), 849.

[11] R. L. Herman, *J. Phys.*, **A23**(1990), 1063; 2327.

[12] J. R. Yan and Y. Tang, *Phy. Rev.*, **E54**(1996), 6816.

[13] E. Mann, *J. Math. Phys.*, **38**(1997), 3772.

[14] H. E. Moses, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 2243.

[15] R.K.Dodd, R.K.Bullough, *Phys. Script*, **20**(1979), 514.
[16] G.L.Lamb, Elements of Soliton Theory(Wiley, New York, 1980).
[17] V.V.Konotop and V.E.Vekslerchik, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 2397.
[18] X.J.Chen, Z.D.Chen, N.N.Huang, *J. Phys.*, **A31**(1998), 6929.

DIRECT PERTURBATION THEORY FOR THE KdV EQUATION*

CHEN ZHI-DE[1)2)] CHEN SHI-RONG[1)] HUANG NIAN-NING[1)]
[1)] (*Department of Physics, Wuhan University, Wuhan* 430072)
[2)] (*Department of Physics, Guangzhou Teachers College, Guangzhou* 510400)
(Received 29 September 1998)

ABSTRACT

An exact direct perturbation theory of the KdV equation with corrections is developed for multi-soliton case. After showing that the derivatives of the squared Jost functions with respect to x are the eigenfunctions of the linearized operator, suitable definitions of the adjoint functions and the inner product are introduced. Orthogonality relations are derived and the expansion of the unity in terms of the squared Jost functions is implied. The completeness relation of the squared Jost functions is shown by the generalized Marchenko equation. The final result indicates that in the expression of the completeness relation, the integral path is along the real axis from $-\infty$ to ∞ but runs over near the origin, which is contrary to the Cauchy principal value appearing in previous works. This leads to the disappear once of the shelf behind the soliton due to perturbations, which was considered as a characterized effect in the previous theories.

PACC: 5235; 0230; 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 1977530) and by the Doctoral Program Foundation of the National Education Commission of China.