

玻色-爱因斯坦凝聚体干涉现象的数值模拟

张思溟 叶 飞

(上海交通大学应用物理系, 上海 200240)

(1998 年 6 月 29 日收到; 1998 年 10 月 29 日收到修改稿)

采用含时非线性薛定谔方程的数值解法模拟了两种情况下玻色-爱因斯坦凝聚体的演化. 一种是在初始状态中有两个包含粒子数差别很大、在空间上可区分的玻色-爱因斯坦凝聚体的情况; 另一种是一个玻色-爱因斯坦凝聚体被外力一分为二后在自由空间及约束势阱中继续演化的情况.

PACC: 0260; 0530

1 引 言

玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)是指玻色气体在一定的转变温度下, 相当一部分粒子进入动量为零的最低量子态. 自从爱因斯坦在理论上得出这一结果之后, 人们就在探索实现 BEC 的方法, 随着 90 年代激光冷却和捕陷技术的发展, 到了 1995 年, 终于在实验上实现了玻色-爱因斯坦凝聚^[1-3]. 实验上的成就激发了理论上的探索. 目前, 人们以极大的热情纷纷投入到 BEC 的研究中来, 在理论、实验和数值模拟这三个方面都获得了许多有意义的结果. 在数值模拟方面, BEC 的形成、基态形状及演化等都很受人们的重视, 为了解释有较弱的相互作用的玻色气体在有限空间的实际凝聚, Ruprecht 等人用数值计算方法求解非线性薛定谔方程(NLSE)并在凝聚体形状及演化方面得出了一些与实验符合的结果^[4], Dalfovo 等人用能量泛函极小化方法求解 BEC 凝聚体的形状^[5], Hoston 等人模拟了两个 BEC 凝聚体间的干涉现象^[6]. 对于干涉现象, 在实验中, 同时得到两个距离很近的 BEC 凝聚体是相当困难的, 为此常用的方法是用激光将一个 BEC 凝聚体一分为二. 本文采用含时非线性薛定谔方程的数值解法模拟了一个 BEC 凝聚体被外力一分为二后在自由空间及约束势阱中继续演化的情况, 并且对初始状态中的两个 BEC 凝聚体包含粒子数差别很大时的演化情况进行了模拟.

2 一维数值模拟

在零温下, 凝聚体波函数可用自洽的平均场 NLSE 来描述, 这个方程又称为 Gross-Pitaevskii 方程, 如果计入约束势, 则方程可表示为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \psi(\mathbf{r}, t) + NU |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 m 是原子质量, ω 是约束势的角频率, N 是凝聚体中的原子数目, U 描述凝聚体中

原子间的互相作用, 在很低的温度下有

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2)$$

其中 a 是散射长度, 它与原子间的低能散射有关. 一维情况下^[4,6], 通过适当的变换

$$\xi = x/\lambda, \quad \tau = \omega t, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\omega}}, \quad (3)$$

可以将方程无量纲化, 得到

$$i \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} \xi^2 \psi(\xi, \tau) + C_{1d} |\psi(\xi, \tau)|^2 \psi(\xi, \tau). \quad (4)$$

因为在非线性项系数 ($C_{1d} = N8\pi a$) 中出现了粒子数 N , 所以需要对波函数进行归一化处理, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (5)$$

方程(4)是一个演化方程, 不含非线性项时它就是一维谐振子的薛定谔方程, 将归一化的一维谐振子解析解作为初态代入方程(4), 用半隐六点差分格式(Crank-Nicolson 格式)的数值解法求解方程(4)所对应的差分方程, 可以得出 BEC 基态的数值解, 这个数值解对非线性项的系数 C_{1d} 是敏感的. 为了得到系数 C_{1d} 不为零的基态解, Ruprecht^[4]等人建议从零开始缓慢地增加非线性项系数的值, 而不是一开始就将 C_{1d} 的值代入. 用这种方法可以讨论基态波函数的形状与非线性项系数的关系、基态的能量及基态随时间的演化. 如果在某一时刻将约束势除去, 又可以讨论基态波函数在自由空间传播时的特性. 在以下计算中我们以 Cs 为例, 对于 Cs, 取 $m = 2.21 \times 10^{-25} \text{ kg}$, $a = 3.45 \text{ nm}$, $\omega = 20 \pi \text{ rad/s}$.

3 两个 BEC 凝聚体间干涉的模拟

3.1 两个 BEC 凝聚体中的粒子数相同的情况

当两个势阱间有一定的距离时, 由于原子被捕获在势阱中, 此时尽管它们处于同一个态, 两个势阱中的粒子不会互相交换, 把这两个势阱中的粒子视为两个 BEC 凝聚体.

如果将方程(4)改为

$$i \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} [(\xi - \xi_0)^2 + (\xi + \xi_0)^2] \psi(\xi, \tau) + N8\pi a |\psi(\xi, \tau)|^2 \psi(\xi, \tau), \quad (6)$$

并将

$$\psi(\xi, 0) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{4}(\xi - \xi_0)^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{4}(\xi + \xi_0)^2\right] \right\}, \quad \alpha = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{-1/2} \quad (7)$$

作为初值代入 ($\pm \xi_0$ 分别是两个谐振子波函数的中心), 经过迭代在 $\pm \xi_0$ 分别得到一个 BEC 基态. 此时如果把约束势置为 0, 即对应实验中除去约束磁场的情况, 凝聚体将迅速向外扩散, 在交叉的区域产生干涉条纹 (见图 1).

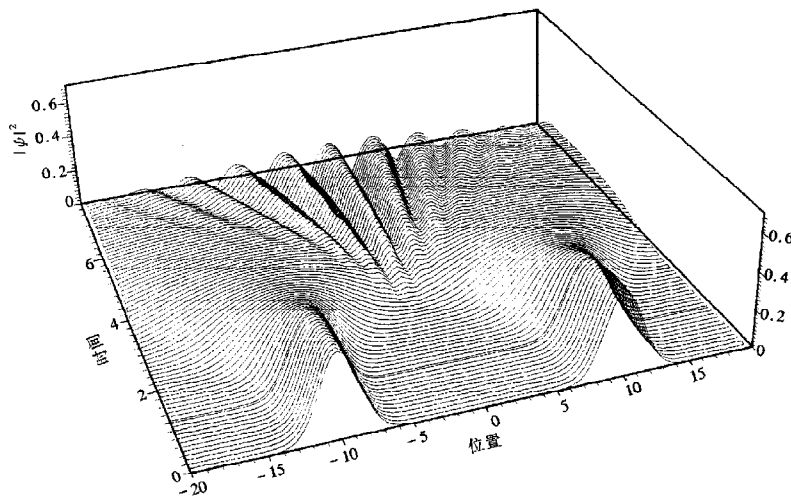


图1 两个粒子数相同的 BEC 凝聚体的干涉 每个凝聚体的非线性项系数均为 $C_{1d}=5$

3.2 两个 BEC 中的粒子数有较大的差别的情况

在演化方程(6)中,设两个势阱中的粒子数分别为 N_1 和 N_2 , 方程将改为

$$i \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} [(\xi - \xi_0)^2 + (\xi + \xi_0)^2] \psi(\xi, \tau) + (N_1 + N_2) 8\pi a |\psi(\xi, \tau)|^2 \psi(\xi, \tau), \quad (8)$$

初值就不能用(7)式,而是要在 $\pm \xi_0$ 的波函数前加上比例系数. 由于势阱的限制,两个势阱中的粒子之间的作用可以忽略,方程(8)实际上可以进行以下的近似处理,即用

$$i \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} [(\xi - \xi_0)^2] \psi(\xi, \tau) + N_1 8\pi a |\psi(\xi, \tau)|^2 \psi(\xi, \tau) \quad (9)$$

和

$$i \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} [(\xi + \xi_0)^2] \psi(\xi, \tau) + N_2 8\pi a |\psi(\xi, \tau)|^2 \psi(\xi, \tau), \quad (10)$$

模拟中心分别在 $\pm \xi_0$, 粒子数分别为 N_1 和 N_2 的两个 BEC 凝聚体, 然后以所得结果为初值代入方程(8), 可以得到两个粒子数不同的 BEC 凝聚体的演化结果(见图2). 在数值实验中取两个 C_{1d} 分别为 1.0 和 5.0, 这意味着 N_1 和 N_2 之比为 1:5. 这个结果与上边的结果只有细微的差别, 即图1中的中央干涉条纹在 0 点总是处于峰值, 而在图2中, 中央条纹的峰值稍稍偏离了 0 点. 这说明在初始条件中各个 BEC 凝聚体所包含的粒子数对干涉结果没有本质的影响.

4 外力分割一个 BEC 后的几种演化现象

4.1 自由空间的干涉

目前实验上尚难同时得到两个相距较大的 BEC 凝聚体, 因此 Andrews 等人^[7]用一束

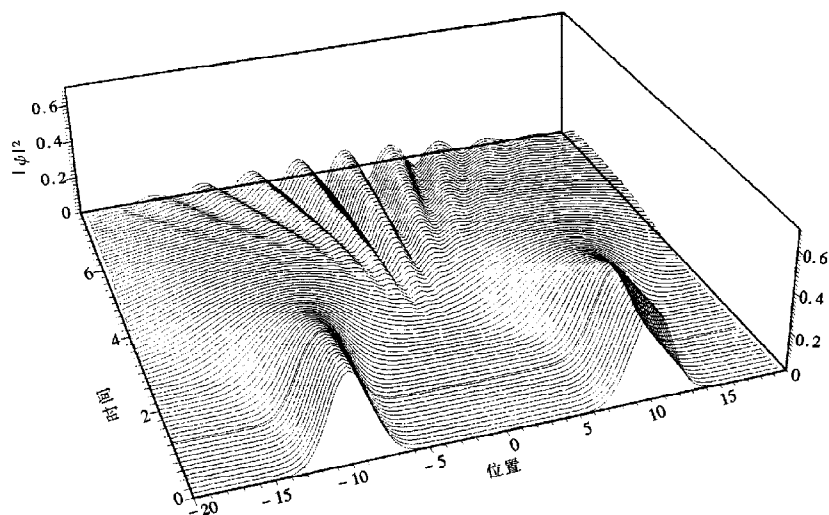


图2 两个粒子数不同的 BEC 凝聚体的干涉 凝聚体的非线性项系数分别为 $C_{1d}=1$, $C_{1d}=5$

激光将一个 BEC 凝聚体一分为二,使它们相对独立地演化一段时间,然后除去激光及约束势,观察它们的干涉情况.在数值模拟中,我们用下列方法模拟这一过程:在得到一个 BEC 基态波函数之后,在迭代中将波函数的中心部分置为 0,使得左右两部分各自演化.经过一段时间以后,中心部分不再置 0,并且将约束势去掉,使 BEC 凝聚体自由扩散.计算表明,BEC 的这两个部分将在自由扩散过程中交叠并且产生相干条纹(见图 3),计算结

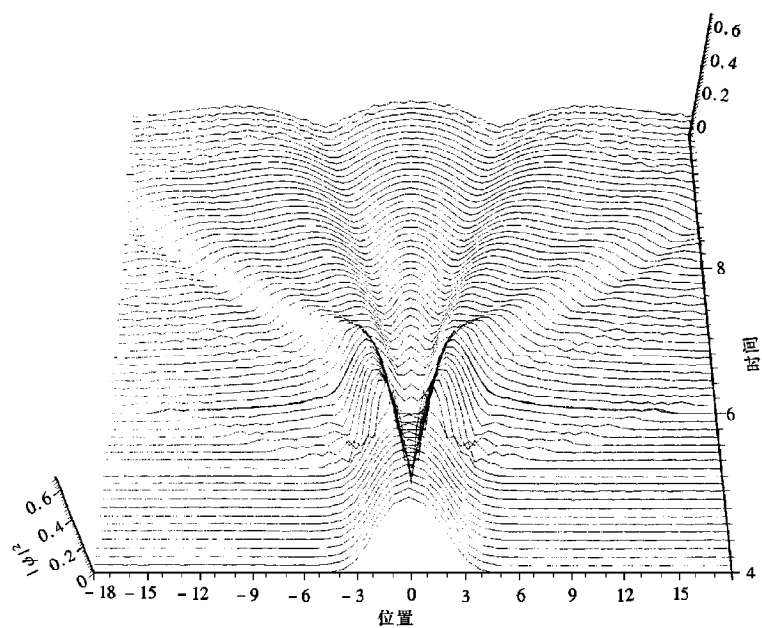


图3 一个 BEC 凝聚体被一分为二后在自由空间中的演化 $C_{1d}=4.5$

果表明在外力撤除之后,经过 30 ms 的演化,条纹的间隔是 $80\text{ }\mu\text{m}$. 这个结果与 Andrews 等的实验结果(经过 40 ms 的演化,条纹的间隔是 $15\text{ }\mu\text{m}$)有一定的差距,这是由于我们的初始条件与他们的实验情况并不完全相同.

将图 1 和图 3 与间距不同的单色光狭缝干涉的图样对比,图 1 相当于狭缝间距较宽的情况,图 3 相当于狭缝间距较窄的情形.图 3 中的条纹不如图 1 的规则,因为分割后的两部分并不是两个完美的基态波函数.

4.2 存在约束势时的演化

如果在将 BEC 凝聚体基态一分为二之后,撤除外力但不撤除约束势,在实验上对应于将激光撤除而约束势仍然存在的情况,这时数值实验显示,BEC 凝聚体的这两部分不能重新复合成原来的形状,而是发生干涉,并且由于约束势的影响,产生了一种比较复杂的周期性的现象:一方面同前几种情况一样存在干涉条纹,另一方面干涉条纹并不像前几种情况那样逐渐变宽,而是随着时间有周期性的变化(如图 4).我们认为,由于没有除去约束势,粒子处在一个相对封闭的状态下,在势阱中来回反射,它们的演化可能存在较复杂的周期性的特征,可以通过实验验证这种特征是否确实存在.

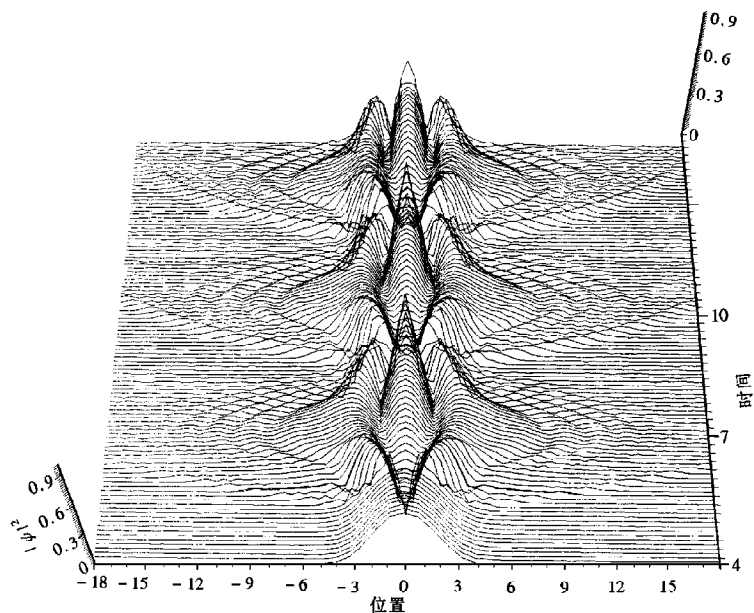


图 4 一个 BEC 凝聚体被一分为二后在约束势阱中的演化 $C_{1d}=4.5$

感谢王超和潘伟等同志的有益讨论和帮助.

- [1] M. H. Anderson, J. R. Enscher, M. R. Methews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269**(1995), 198.
- [2] C. C. Bradley, C. A. Sacket, J. J. Tollent, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 1687.
- [3] K. B. Davis, M. -O. Meuves, M. R. Anderson, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 3696.

- [4] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, M. Edwards, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 4705.
- [5] F. Dalfovo, S. Stringari, *Phys. Rev.*, **A53**(1996), 2477.
- [6] W. Hoston, L. You, *Phys. Rev.*, **A53**(1996), 4254.
- [7] M. R. Andrews, C. G. Townsend, *et al.*, *Science*, **275**(1997), 637.

A NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERFERENCE IN BEC

ZHANG SI-MING YE FEI

(*Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240*)

(Received 29 June 1998; revised manuscript received 29 October 1998)

ABSTRACT

We explore the time evolution of BEC condensates under different condition by solving the time-dependent nonlinear Schrödinger equation(NLSE) that describes an inhomogeneous, weakly interacting Bose-Einstein condensate at zero temperature. We present numerical results of interference of two condensates which have different number of atoms in them and examine the evolution of a Bose-Einstein condensate which has split into two parts.

PACC: 0260; 0530