

粒子质量显含时间的 Dirac 方程的严格解

郭 华

(北京大学技术物理系和重离子物理研究所, 北京 100871)

(1998 年 10 月 29 日收到)

使用代数方法给出了粒子质量显含时间的 Dirac 方程的严格解, 解的结构显示了粒子的正负能态与其自旋态具有交换对称性.

PACC: 0365

1 引 言

在粒子物理中, 不稳定粒子表现为粒子的质量与时间有关, 会引起粒子的衰变. 核-核碰撞过程中, 手征对称性的恢复需要研究组分夸克质量随时间的变化关系^[1]. 对于玻色子质量显含时间, 可以归结为对含时间 Klein-Gordon 方程的求解, 其直接应用为谐振子的质量显含时间时, 会引起压缩效应^[2]. 如果费密子质量显含时间, 则需要求解显含时间的 Dirac 方程, 对显含时间的 Dirac 方程求解尚未见报道. 本文试图通过代数方法给出粒子质量显含时间的 Dirac 方程的严格解.

2 显含时间的 Dirac 方程及其解

Dirac 方程是描述费密子运动的相对论量子力学方程, 在自然单位制中可以表示为^[3]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}(t) \psi \equiv [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m(t)] \psi. \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 矩阵满足

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = \alpha_i^2 = 1. \quad (2)$$

如果(1)式, m 不显含时间, 对于时-空均匀的系统, 很容易在动表象中对其求严格解. 而在 m 显含时间时, 要对(1)式严格求解并不显而易见, 需要借助于代数动力学的方法^[4]. 为此, 把 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 矩阵重新表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = 4 \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\mathbf{S}}, \quad \beta = 2 \hat{\rho}_3, \quad (3)$$

其中 $\{\hat{\rho}_i\}$ 与 $\{\hat{\mathbf{S}}_i\}$ 的形式为 Pauli 矩阵, 满足

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_j] &= i \epsilon_{ijk} \hat{\rho}_k, \quad \hat{\rho}_i^2 = \frac{1}{4}, \\ [\hat{\mathbf{S}}_i, \hat{\mathbf{S}}_j] &= i \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{S}}_k, \quad \hat{\mathbf{S}}_i^2 = \frac{1}{4}, \quad [\hat{\rho}_i, \hat{\mathbf{S}}_j] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

通过这样的分解, Dirac 哈密顿量可以用 Pauli 生成元重新表示为

$$\hat{H}(t) = 4\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 2m(t)\hat{\rho}_3. \quad (5)$$

从上式可以看出 Dirac 哈密顿量具有 $\text{SU}_2 \otimes \text{SU}_2$ 形式的代数结构.

若令 Dirac 哈密顿量本征态的形式解为 $\psi(t) = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{p}, t)$, 代入(1)式, 则得到 $f(\mathbf{p}, t)$ 所满足的方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{p}, t) = [4\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 2m(t)\hat{\rho}_3] f(\mathbf{p}, t). \quad (6)$$

由于 $[\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{H}(t)] = 0$, 所以 $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 仍为守恒量, 可以对其先作简化, 令 $f(\mathbf{p}, t)$ 的形式为

$$f(\mathbf{p}, t) = U_g(\theta, \phi) f_1(\mathbf{p}, t). \quad (7)$$

其中 $U_g(\theta, \phi) = e^{-i\theta \hat{S}_3} e^{-i\phi \hat{S}_2}$, θ, ϕ 为待定参数, 且不显含时间, 则得到

$$U_g^{-1} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} U_g = \hat{S}_1 [p_1 \cos \theta \cos \phi + p_2 \cos \theta \sin \phi - p_3 \sin \theta] + \hat{S}_2 [-p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi] + \hat{S}_3 [p_1 \sin \theta \cos \phi + p_2 \sin \theta \sin \phi + p_3 \cos \theta], \quad (8)$$

若令

$$p_1 \cos \theta \cos \phi + p_2 \cos \theta \sin \phi - p_3 \sin \theta = 0, \\ -p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi = 0, \quad (9)$$

从中可以解出 $\tan \theta = \frac{p_3}{p}$, $\tan \phi = \frac{p_2}{p_1}$, 显然 θ, ϕ 为粒子动量的方向角, $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ 为

动量的大小. 通过上面的转动变换, 可以使(8)式简化为 $U_g^{-1} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} U_g = p \hat{S}_3$, 这样得到 $f_1(\mathbf{p}, t)$ 所满足的方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}, t) = [4p \hat{\rho}_1 \otimes \hat{S}_3 + 2m(t)\hat{\rho}_3] f_1(\mathbf{p}, t). \quad (10)$$

若令上式的形式解为

$$f_1(\mathbf{p}, t) = f_2(\mathbf{p}, t) \otimes \chi_i, \quad (11)$$

其中 $\hat{S}_3 \chi_i = s_i \chi_i$, $\chi_i = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$; s_i 为自旋第三分量算符 $\hat{S}_3$ 的本征值. 当 $s_i = \frac{1}{2}$ 时, $c = 1, d =$

0; 当 $s_i = -\frac{1}{2}$ 时, $c = 0, d = 1$. 这样得到 $f_2(\mathbf{p}, t)$ 所满足的方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_2(\mathbf{p}, t) = [4ps_i \hat{\rho}_1 + 2m(t)\hat{\rho}_3] f_2(\mathbf{p}, t). \quad (12)$$

由于 $m(t)$ 显含时间, 可以用李代数动力学的方法来求解^[4].

若令 $f_2(\mathbf{p}, t) = V_g(z_2, z_3) f_3(\mathbf{p}, t)$, 其中转动算符取为 $V_g(z_2, z_3) = e^{-iz_3 \hat{p}_3} e^{-iz_2 \hat{p}_2}$. 值得注意的是这里的待定参数 z_2, z_3 显含时间. 从而使 $f_3(\mathbf{p}, t)$ 所满足的方程成为

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_3(\mathbf{p}, t) = \left[4ps_i V_g^{-1} \hat{\rho}_1 V_g + 2m(t) V_g^{-1} \hat{\rho}_3 V_g - i V_g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} V_g \right] f_3(\mathbf{p}, t), \\ \equiv \hat{H}(t) f_3(\mathbf{p}, t). \quad (13)$$

根据 SU_2 代数生成元及转动算符的性质, 可以得到

$$\hat{H}(t) = \hat{\rho}_1 \left[\frac{dz_3}{dt} \sin z_2 + 4ps_i \cos z_2 \cos z_3 - 2m(t) \sin z_2 \right] + \hat{\rho}_2 \left[-\frac{dz_2}{dt} - 4ps_i \sin z_3 \right] + \hat{\rho}_3 \left[-\frac{dz_3}{dt} \cos z_2 + 4ps_i \sin z_2 \cos z_3 + 2m(t) \cos z_2 \right]. \quad (14)$$

在上式中, 可以选择参数 z_2, z_3 满足

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{dt} \sin z_2 + 4 p s_i \cos z_2 \cos z_3 - 2 m(t) \sin z_2 &= 0, \\ -\frac{dz_2}{dt} - 4 p s_i \sin z_3 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

利用上式, 则可以使方程(14)简化为

$$\overline{\hat{H}}(t) = 4 p s_i \frac{\cos z_3}{\sin z_2} \hat{\rho}_3, \quad (16)$$

这样方程(13)成为
$$i \frac{\partial}{\partial t} f_3(\mathbf{p}, t) = 4 p s_i \frac{\cos z_3}{\sin z_2} \hat{\rho}_3 f_3(\mathbf{p}, t). \quad (17)$$

显然 $f_3(\mathbf{p}, t)$ 的解可以表示为
$$f_3(\mathbf{p}, t) = e^{-i\Omega_j(t)} \eta_j, \quad (18)$$

其中 $\hat{\rho}_3 \eta_j = J_i \eta_j$, $\eta_j = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; J_i 为算符第三分量 $\hat{\rho}_3$ 的本征值, 当 $J_i = \frac{1}{2}$ 时, $a=1, b=0$; 当

$J_i = -\frac{1}{2}$ 时, $a=0, b=1$. 时间相关的因子可以表示为 $\Omega_j(t) = 4 p s_i J_i \int_0^t \frac{\cos z_3(t')}{\sin z_2(t')} dt'.$

至此, 得到了显含时间 Dirac 方程的严格解为

$$\psi(t) = e^{-i\Omega(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{V}_g \eta_j \otimes \mathbf{U}_g \chi_i, \quad (19)$$

与之相应的本征能量为

$$\begin{aligned} E(t) &= \langle \psi(t) | \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \eta_j \otimes \chi_i | \overline{\hat{H}} + i \mathbf{V}_g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_g | \eta_j \otimes \chi_i \rangle \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m(t)^2} \text{sign}(J_i), \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\text{sign}(J_i)$ 为符号函数.

根据 Pauli 矩阵的代数性质, 可以把 Dirac 方程的解写成更为对称的形式

$$\psi(t) = e^{-i\Omega_j(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} e^{-iz_3/2} (a \cos z_2/2 - b \sin z_2/2) \\ e^{iz_3/2} (a \sin z_2/2 + b \cos z_2/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} (c \cos \theta/2 - d \sin \theta/2) \\ e^{i\phi/2} (c \sin \theta/2 + d \cos \theta/2) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中 a, b 系数的不同取值, 分别对应于正能态与负能态的解, 考虑到与自旋态相对应的 c, d 的不同取值后, 可以分为 4 种情况.

(a) $a=1, b=0; c=1, d=0$, 则相应于 $s_i=1/2; J_i=1/2$; 此时粒子能量为正, 其解为

$$\psi_1(t) = e^{-i\Omega_j(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} e^{-iz_3/2} \cos z_2/2 \\ e^{iz_3/2} \sin z_2/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

(b) $a=1, b=0; c=0, d=1$, 则相应于 $s_i=-1/2; J_i=1/2$; 粒子能量仍然为正, 自旋方向与(a)相反, 其解为

$$\psi_2(t) = e^{-i\Omega_j(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} e^{-iz_3/2} \cos z_2/2 \\ e^{iz_3/2} \sin z_2/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

(c) $a=0, b=1; c=1, d=0$, 则相应于 $s_i=1/2; J_i=-1/2$; 粒子能量为负, 其解为

$$\psi_3(t) = e^{-i\Omega_j(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} -e^{-iz_3/2} \sin z_2/2 \\ e^{iz_3/2} \cos z_2/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

(d) $a=0, b=1; c=0, d=1$, 则相应于 $s_i=1/2; J_i=-1/2$; 粒子能量为负, 自旋方向与(c)相反, 其解为

$$\psi_4(t) = e^{-i\Omega_j(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} -e^{-iz_3/2} \sin z_2/2 \\ e^{iz_3/2} \cos z_2/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

3 结 论

从显含时间 Dirac 方程的严格解中可以看出, 粒子能量的正负由 J_i 的正负决定, 与 $\{\hat{p}_i\}$ 的代数有关, 而粒子的自旋态与 $\{\hat{S}_i\}$ 的代数有关. 时间相关的参数 z_2, z_3 , 是在粒子质量与时间关系确定以后, 由微分方程组(15)来决定. 若粒子的质量与时间无关, 则很容易从(15)式中得到 $z_3=0, \cos z_2 = \frac{m}{E}, \sin z_2 = \frac{2s_i p}{E}$, ($s_i=1/2$ 或 $-1/2$), $\Omega_j = 2J_i E t$ ($J_i=1/2$ 或 $-1/2$), 则 Dirac 方程的严格解可以退化成粒子质量不含时间的自由 Dirac 方程的解.

从 Dirac 方程的解(21)中可以看出, 若把粒子能态相关的参数($z_2, z_3; a, b$)与粒子自旋态相关的参数($\theta, \phi; c, d$)交换, Dirac 方程解的形式不变, 显示了解的交换对称性, 这正是 Dirac 哈密顿具有 $SU_2 \otimes SU_2$ 代数结构的反映.

感谢与兰州大学王顺金教授, 应祖建博士, 岑立相博士及张常华博士的有益讨论.

- [1] A. Abada, J. Aichel, *Phys. Rev. Lett.*, **16**(1995), 3130.
- [2] H. Y. Fan, H. R. Zaidi, *Can. Jour. Phys.*, **67**(1989), 152; 范洪义, 量子力学表象与变换(上海科学技术出版社, 上海, 1997) [Fan Hong-yi, Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics (Shanghai Scientific and Technical Publisher, Shanghai, 1997) (in Chinese)].
- [3] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A117**(1928), 610.
- [4] S. J. Wang, F. L. Li, A. Weiguny, *Phys. Lett.*, **A180**(1993), 189; S. J. Wang, *Phys. Rev.*, **A24**(1990), 5103; 5107.

EXACT SOLUTION OF THE TIME-DEPENDENT DIRAC EQUATION

GUO HUA

(Department of Technical Physics and Institute of Heavy-ion Physics, Peking University, Beijing 100871)

(Received 29 October 1998)

ABSTRACT

By use of algebraic method, the exact solution of the time-dependent Dirac equation was obtained, and the exchange symmetry in the solution was discussed.

PACC: 0365