

两类新的条件精确可解势及其 非线性谱生成代数^{*}

马 涛 倪致祥

(阜阳师范学院物理系, 安徽阜阳 236032)

(1998 年 4 月 13 日收到)

从平移的谐振子势出发, 利用超对称量子力学构造出两类新的条件精确可解势, 其中一类同时出现超对称性和空间对称性的破缺. 此外, 还构造出了这两类新可解势的非线性谱生成代数.

PACC: 0365; 0210

1 引 言

寻找新精确可解势的研究一直是非相对论量子力学中的重要课题. 利用超对称量子力学^[1]和因式分解法^[2], 已经构造出若干新的精确可解势^[3,4]. 最近 Dutra 提出了条件精确可解势的概念^[5]. 在此基础上利用超对称性构造出了一些新的条件可解势^[6,7]. 从数学角度看, 这些新的条件可解势的构造与超对称变换的半么正性有关^[8].

最近, 我们发现利用逆的超对称性变换, 可以在平移的谐振子势基础上构造出两类新的条件精确可解势. 其中一类对应于超对称性未破缺情况; 另一类对应于超对称性破缺的情况. 这两类新的条件可解势各自伴有一个非线性李代数结构.

本文给出了新条件可解势的构造框架; 具体构造出了两类新的条件可解势; 进一步得出了与新可解势对应的非线性李代数.

2 新可解势的构造

按超对称量子力学, 两个互伴的哈密顿算符

$$H_{\pm} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) \quad (1)$$

可以因式分解为

$$H_- = A^+ A, H_+ = AA^+, \quad (2)$$

其中线性微分算符 A 可用超势 $W(x)$ 表示为

^{*} 安徽省教育委员会资助的课题.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + W(x) \right), \quad (3)$$

而 A^+ 为 A 的厄米共轭. 势场 $V_{\pm}(x)$ 与超势 $W(x)$ 的关系为

$$V_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(W^2 \pm W'), \quad W' = \frac{d}{dx}W. \quad (4)$$

按文献[9], 当波函数

$$\phi_{\pm}(x) = \exp \left[\pm \int^x W(z) dz \right] \quad (5)$$

均不能归一化时, 出现超对称性破缺. 此时互伴哈密顿 $H_{\pm}$ 具有相同的能谱.

$$E_n^+ = E_n^- > 0 \quad n \in N. \quad (6)$$

对应的本征态有以下关系:

$$\phi_n^+(x) = (E_n^-)^{-1/2} A \phi_n^-(x), \quad \phi_n^-(x) = (E_n^+)^{-1/2} A^+ \phi_n^+(x). \quad (7)$$

而当波函数 $\phi_{\pm}(x)$ 中有一个可归一化时, 超对称性不发生破缺. 此时可归一化的波函数为对应零能量的本征态, 即满足条件

$$A \phi_-(x) = 0 \quad \text{或} \quad A^+ \phi_+(x) = 0. \quad (8)$$

显然 $\phi_+(x) \phi_-(x) = \text{const.}$, 故二者不可能同时归一化. 因此互伴哈密顿 $H_{\pm}$ 的能谱中相差一个 0 能级, 其他能级仍然满足条件(6)和(7)两式.

取 H_+ 为平移的谐振子, 即

$$V_+(x) = \frac{1}{2}x^2 + V_0 \quad V_0 \geq 0. \quad (9)$$

容易看出 H_+ 不存在零能量的本征态, 因此 $\phi_+(x)$ 是不可归一化的. 不失一般性, 把超势 $W(x)$ 表示为

$$W(x) = x + [\ln u(x)]' = x + \frac{d}{dx} \ln u(x), \quad (10)$$

其中 $u(x)$ 为待定函数. 由(4)式不难得到

$$u'' + 2xu' - 2ku = 0, \quad (11)$$

式中 $u' = \frac{d}{dx}u(x)$, $u'' = \frac{d^2}{dx^2}u(x)$, $k = V_0 - \frac{1}{2}$.

由(5)和(10)两式, 可以看出, 当 $u(x)$ 为无实零点的多项式时, $\phi_-(x)$ 即可归一化. 这时得到一个新的可解势

$$V_-(x) = V_+(x) - W'(x), \quad (12)$$

其哈密顿算符 H_- 的能量本征态和本征值可以由超对称性关系得到

$$E_0^- = 0, \quad \phi_0^-(x) = \phi_-(x); \quad (13)$$

而

$$E_n^- = E_{n-1}^+ = n - \frac{1}{2} + V_0 = n + k, \quad n \in N, \quad (14)$$

$$\phi_n^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2(n+k)}} \left(-\frac{d}{dx} + x + \frac{u'}{u} \right) \phi_{n-1}^+(x),$$

其中

$$\phi_n^+(x) = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) \quad (15)$$

为谐振子的第 n 个本征态, $H_n(x)$ 为厄米多项式. 显然仅当参数 V_0 或 k 取某些特定参数时, 方程(11)才有无零点多项式解, 这说明由此得到的可解势是条件精确可解势.

3 两类新的条件可解势

由(11)式, 当 k 为非负整数时, 其解为虚宗量厄米多项式, 适当选取相因子, 有

$$u(x) = u_k(x) = (-i)^k H_k(ix) = e^{-x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{x^2}. \quad (16)$$

由(16)式容易看出, 当 $k=2l$ 为偶数时, $u_k(x)$ 为偶函数没有实的零点. 满足第2节中的条件. 设厄米多项式 $H_k(x)$ 的正零点为 $a_i, i=1, 2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]$. 由(16)式可以推出

$$u_{2l}(x) = 2^{2l} \prod_{i=1}^l (x^2 + a_i^2). \quad (17)$$

利用(10)式, 我们得到超势为

$$W_l^{(1)}(x) = x + \sum_{i=1}^l \frac{2x}{x^2 + a_i^2}, \quad (18)$$

对应的新可解势为

$$V_l^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2l + \frac{1}{2} - [W_l^{(1)}(x)]'. \quad (19)$$

下面是与前3个 l 值对应的新的可解势

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{8x^2 - 4}{(2x^2 + 1)^2}, \\ V_2^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2} - \frac{4}{2x^2 + 3 + \sqrt{6}} + \frac{16x^2}{(2x^2 + 3 + \sqrt{6})^2} \\ &\quad - \frac{4}{2x^2 + 3 - \sqrt{6}} + \frac{16x^2}{(2x^2 + 3 - \sqrt{6})^2}, \\ V_3^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2} - \frac{4}{2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\theta - 5} + \frac{16x^2}{(2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\theta - 5)^2} \\ &\quad - \frac{4}{2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - 5} + \frac{16x^2}{\left(2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - 5\right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - 5} + \frac{16x^2}{\left(2x^2 + 2\sqrt{10}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - 5\right)^2}, \quad (20) \end{aligned}$$

式中 $\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

当 $k=2l+1$ 为奇数时, $u_k(x)$ 为奇函数, 有唯一的实零点 $x=0$, 不满足第2节中的可归一化条件, 因此对应的是对称性破缺情况. 由(16)式可以推出

$$u_{2l+1}(x) = 2^{2l+1} x \prod_{i=1}^l (x^2 + a_i^2). \quad (21)$$

利用(10)式,我们得到第二类超势为

$$W_l^{(2)}(x) = x + \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^l \frac{2x}{x^2 + a_i^2}, \quad (22)$$

对应的第二类新可解势为

$$V_l^{(2)}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2l + \frac{3}{2} - [W_l^{(2)}(x)]'. \quad (23)$$

下面是与前3个 l 值对应的第二类新可解势

$$\begin{aligned} V_1^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}, \\ V_2^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{2x^2 + 3} - \frac{24}{(2x^2 + 3)^2} + \frac{5}{2}, \\ V_3^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{2x^2 + 5 + \sqrt{10}} - \frac{4}{2x^2 + 5 - \sqrt{10}} \\ &\quad + \frac{16x^2}{(2x^2 + 5 + \sqrt{10})^2} + \frac{16x^2}{(2x^2 + 5 - \sqrt{10})^2} + \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

不难看出,文献[7]中所得到的新可解势是上述结果的一些特例,我们的结果更简明、完整和统一.

值得注意的是在本文的情况下超对称性发生破缺时,空间对称性也同时发生了破缺.因此第二类新条件可解势场只允许奇宇称的波函数存在.

4 非线性李代数结构

文献[10]构造出了 Pöschl-Teller 势的非线性谱生成代数,我们发现本文所得到的新条件精确可解势也存在相应的非线性李代数结构.新条件可解势场 $V_l^{(1,2)}(x)$ 的能量阶梯算符可以由其超对称伴(平移谐振子)的阶梯算符

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + x \right) \quad (25)$$

构成.对第一类新条件精确可解势 $V_l^{(1)}(x)$,其能量升、降算符分别为

$$D_{\pm}^{(1)} = A^{\pm} a_{\pm} A, \quad (26)$$

不难验证阶梯算符 $D_{\pm}^{(1)}$, $D_{\mp}^{(1)}$ 及哈密顿算符 $H^{(1)}$ 满足如下对易关系

$$[H^{(1)}, D_{\pm}^{(1)}] = \pm D_{\pm}^{(1)}, \quad [D_{-}^{(1)}, D_{+}^{(1)}] = 3H^{(1)^2} - (4l+1)H^{(1)}. \quad (27)$$

这表明 $D_{\pm}^{(1)}$ 和 $H^{(1)}$ 生成了一个非线性李代数,该李代数是新条件精确可解势 $V_l^{(1)}(x)$ 的非线性谱生成代数.

对第二类新条件精确可解势 $V_l^{(2)}(x)$,由于要求本征态只能是奇宇称态,因此其能量升、降算符分别为

$$D_{\pm}^{(2)} = A^{\pm} a_{\pm}^2 A. \quad (28)$$

不难验证

$$[H^{(2)}, D_{\pm}^{(2)}] = \pm 2D_{\pm}^{(2)},$$

$$[D_-^{(2)}, D_+^{(2)}] = 8H_-^{(2)^3} - (24l + 18)H_-^{(2)^2} + (16l^2 + 24l + 12)H_-^{(2)}. \quad (29)$$

上式给出了第二类新条件精确可解势的非线性谱生成代数.

由于新条件精确可解势中的参数只能取某些特定值,因而与文献[10]中的结果不同,我们得到的两类新的非线性谱生成代数不能简单地看成某个经典李代数的非线性形变.

5 结 论

由无实零点多项式条件,用超对称性变换构造出了两类新的条件精确可解势及其非线性谱生成代数.其中一类的超对称性和空间对称性在变换中同时发生了破缺.有关这两类新可解势的具体性质和应用问题,将另文讨论.

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B185**(1981), 513.
- [2] E. Schrödinger, *Proc. R. Irish, Acad.*, **A46**(1940), 9.
- [3] D. Zhu, *J. Phys.*, **A20**(1987), 4331.
- [4] M. W. Coffey, *J. Phys.*, **A21**(1988), 3183.
- [5] A. de S. Dutra, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), R2435.
- [6] R. Dutt, A. Khare, Y. P. Varshni, *J. Phys.*, **A28**(1995), L107.
- [7] G. Junker, P. Roy, *Phys. Lett.*, **A232**(1997), 155.
- [8] J. Zhang, X. Li, Z. Ni, *Phys. Lett.*, **A214**(1996), 107.
- [9] C. V. Sukumar, *J. Phys.*, **A18**(1985), 2917.
- [10] Z. Ni, *Phys. Lett.*, **A235**(1997), 313.

TWO NEW CLASSES OF CONDITIONALLY EXACTLY SOLVABLE POTENTIAL AND THEIR NONLINEAR SPECTRUM-GENERATING ALGEBRAS*

MA TAO NI ZHI-XIANG

(Department of Physics, Fuyang Normal College, Fuyang 236032)

(Received 13 April 1998)

ABSTRACT

Using ideas of supersymmetric quantum mechanics, two new classes of conditionally exactly solvable potentials are constructed from the displaced harmonic oscillator potential. The supersymmetry as well as the space symmetry is broken in one class of them. Furthermore we construct the nonlinear spectrum-generating algebras for them.

PACC: 0365; 0210

* Project supported by the Educational Committee of Anhui Province.