第 48 卷 第 6 期 1999 年 6 月
1000-3290/1999/48(06)/0992-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.48, No.6, June, 1999

共形平直时空中电磁场和标量场的解*

陈 光

(华东理工大学理论物理研究所,上海 200237; 汕头大学,汕头 515063)

(1998 年 9 月 29 日收到)

给出电磁场和标量场在共形平直时空中的解,发现了平面对称解的不确定性及由多重解的交集来定义一个非连续场的方法.

PACC: 0420

近年来,一些学者在研究广义相对论的电磁场和标量场的平面对称解方面做出了大量有意义的工作[1—6].本文给出电磁场和标量场在共形平直时空中的解.这些解除了具有度规的平面对称性之外,还具有度规的双重性,其确定的部分对应于双度规的交集,是一个分布于几何平面上并沿其法线方向以光速传播的部分场.由此发现了平面对称解的不确定性以及由多重解的交集来定义一个非连续场的方法.

基于 Einstein 方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

代入以共形平直时空度规

$$g_{\mu\nu} = \zeta^2 \eta_{\mu\nu}. \tag{2}$$

其中, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$为 Minkowski 时空度规.可以导出

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi\zeta^2}\left[2\zeta_{,\mu}\zeta_{,\nu} - \zeta\zeta_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}(\zeta_{,\rho}\zeta_{,\lambda} - 2\zeta\zeta_{,\rho\lambda})\right]. \tag{3}$$

对于电磁场有

$$\begin{aligned} &F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \qquad F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0, \\ &F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}, \end{aligned} \tag{4}$$

及

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{5}$$

联解(1)—(5)式,并选择坐标系使电磁场沿 Z 轴的负向传播,又选择横规范,同时考虑到当电磁势趋于零时,共形平直时空度规 $g_{\mu\nu}$应回复到Minkowski 时空度规 $\eta_{\mu\nu}$,可以得到下列特殊解:

共形因子

$$\zeta = 1 \pm \beta(x^0 + x^3). \tag{6}$$

其中 β为任意常数, $x^0 = t$, $x^3 = z$.

电磁势

$$A_1 = \pm\, b(\zeta - 1) = b\beta(t + z), \quad b^2 = \frac{1}{2\pi}, \tag{7}$$

电磁场

$$E_1 = -\, b\beta, \; B_2 = b\beta. \tag{8}$$

能量动量张量

$$T_{00} = T_{33} = T_{30} = T_{03} = \frac{\beta^2}{2\pi\zeta^2}. \tag{9}$$

对于标量场有

$$\Box\phi = 0, \tag{10}$$

及

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\phi_{,\rho}\phi_{,\lambda}. \tag{11}$$

联解(1)—(3),(10)和(11)式,得到特殊解:

共形因子

$$\zeta = 1 \pm \alpha(t + z). \tag{12}$$

其中,α 为任意常数.

标量势

$$\phi = a\ln\zeta, \quad a^2 = \frac{1}{2\pi}. \tag{13}$$

能量动量张量

$$T_{00} = T_{33} = T_{03} = T_{30} = \frac{\alpha^2}{2\pi\zeta^2}. \tag{14}$$

易证明,(9)和(14)式均满足守恒定律

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = T^{\nu}_{\mu,\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\nu}T^{\rho}_{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}T^{\nu}_{\rho} = 0, \tag{15}$$

及

$$T^{\nu}_{\mu,\nu} = \Gamma^{\nu}_{\rho\nu}T^{\rho}_{\mu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}T^{\nu}_{\rho} = 0. \tag{16}$$

由(6)—(9)式或(12)—(14)式,可知解存在双重性,分别对应于 $\zeta=1+\beta(t+z)$ 及 $\zeta=1-\beta(t+z)$ 或 $\zeta=1+\alpha(t+z)$ 及 $\zeta=1-\alpha(t+z)$. 对于电磁场或标量场,由于我们无法唯一地确定出一个解,因此存在度规和曲率的不确定性. 另外,上述的度规还存在关于 X-Y 平面的对称性. 而我们知道一个具有有限能量和平面对称度规的场只能分布在一个几何平面上,但是由于在法线方向上的不连续性它不能作为场方程的解而直接求出. 因此任何场方程的平面对称解其能量都是发散的即存在能量的不确定性. 对于电磁场或标量场,为了得到确定的结果,可以求出双重解的交集,它对应于 $t+z=0$. 这正是一个在 t 时刻位于 $-z$ 平面上且以光速沿 Z 轴负向传播的部分场. 诚然,这个部分场具有唯一确定的度规、曲率和能量. 考虑到在经典理论中,解的不确定部分是非物理的,而只有解的确定部分才具有物理意义,因此上述的结果意味着可以通过双重解的交集来定义一种无法由场方程直接求解的非连续场. 而这种非连续场由于它的确定性及其均匀地分布于一个几何平面上,因此可以看作场孤立子的一种特殊的拓扑结构.

进一步的分析表明,场方程的不确定解是多重的. 实际上,基于 Einstein 方程以及广义协变的 Maxwell 方程或标量场方程,可以求出无穷多具有平面对称度规的解,这些解均相交于 $t+z=0$ 的平面上. 例如对于电磁场(标量场)存在共形因子为 $\zeta=[1\pm\beta(t+$

$z)]^{\eta}$($\zeta=[1\pm\alpha(t+z)]^{\xi}$)及势函数 $A_1=\pm b(\zeta-1)$ ($\phi=a\ln\zeta$), η, β和 b(ξ, α 和 a)均为常数的解.适当选择常数 η, β和 b(ξ, α 和 a),则所有这些共形平直时空中的解均相交于 $t+z=0$ 的平面上.又如对应于文献[2]中的解

$$\begin{aligned}
&ds^2 = E[-dt^2+dz^2]+G(dx^2+dy^2),\\
&E_1=(\varepsilon_1/\sqrt{EG})\exp[-a(t+z)],\ E_2=(\varepsilon_2/\sqrt{EG})\exp[-a(t+z)],\\
&B_1=(\varepsilon_2/\sqrt{EG})\exp[-a(t+z)],\ B_2=-(\varepsilon_1/\sqrt{EG})\exp[-a(t+z)],\\
&E=\exp\left[-\frac{a}{2}(t+z)\right],\qquad G=\exp[-2a(t+z)].
\end{aligned}\tag{17}$$

存在另一个解

$$\begin{aligned}
&E_1=(\varepsilon_1/\sqrt{EG})\exp[a(t+z)],\ E_2=(\varepsilon_2/\sqrt{EG})\exp[a(t+z)],\\
&B_1=(\varepsilon_2/\sqrt{EG})\exp[a(t+z)],\ B_2=-(\varepsilon_1/\sqrt{EG})\exp[a(t+z)],\\
&E=\exp\left[\frac{a}{2}(t+z)\right],\qquad G=\exp[2a(t+z)].
\end{aligned}\tag{18}$$

可知,(17)和(18)式相交于 $t+z=0$ 的平面上.而当取 $\varepsilon_1=-b\beta$, $\varepsilon_2=0$ 时,则(17)式与(6)—(8)式也相交于 $t+z=0$ 的平面上.

[1] Li Jian-Zeng and Liang Can-Bin, *Gen. Rel. Grav.*, **17**(1985), 1001.

[2] Li Jian-Zeng and Liang Can-bin, . *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1984), 23.

[3] 李鉴增、梁灿彬.物理学报, **40**(1991), 673 [Li Jian-zeng, Liang Can-bin, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 673 (in Chinese)].

[4] Jianzeng Li, *J. Math. Phys.*, **33**(1992), 3506.

[5] 李鉴增.物理学报, **42**(1993), 188 [Li Jian-zeng, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 188(in Chinese)].

[6] 张稳朝.物理学报, **46**(1997), 640 [Zhang Wen-chao, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 640(in Chinese)].

CONFORMAL FLAT SPACE-TIME SOLUTIONS IN ELECTROMAGNETIC AND SCALAR THEORY

CHEN GUANG

(*Institute for Theoretical Physics, East China University of Science and Technology, Shanghai* 200237; *Shantou University, Shantou* 515063)

(Received 29 September 1998)

ABSTRACT

The conformal flat space-time solutions in electromagnetic and scalar theory are shown, and the indefiniteness of the plane-symmetric solutions and the method for defining a noncontinuous field by the intersection of multi-solutions are demonstrated.

PACC: 0420