

有限数目捕获原子的玻色-爱因斯坦凝聚

衣学喜

(东北师范大学理论物理研究所, 长春 130024; 吉林大学物理系, 长春 130023)

(1998 年 9 月 7 日收到; 1998 年 10 月 12 日收到修改稿)

研究了各向异性谐振子捕获势中有限数目原子的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC), 结果表明: 对有限数目捕获原子来说, 它的 BEC 临界温度比热力学极限下捕获原子的 BEC 临界温度要低, 原子间的相互作用也将提高(散射长度为负)或降低(散射长度为正)原子 BEC 临界温度. 临界温度以下体系的比热随温度的变化行为不再是 $T^{3/2}$, 而近似为 T^3 . 在定域密度近似下, 还研究了各向同性捕获势中原子的空间分布, 对有限数目的原子来说, 它的密度比热力学极限下的要小, 原子间的相互作用也降低原子的空间分布密度.

PACC: 0530; 6460; 3280

1 引 言

1995 年美国 3 个研究小组相继报道了原子气体 BEC 在碱金属原子 ^{87}Rb ^[1], ^7Li ^[2]和 ^{23}Na ^[3]中的实现. 这个实验结果震撼了整个物理学界. BEC 的概念^[4]已经提出 70 余年了, 应用量子统计理论对 BEC 已作了大量的研究工作, 特别是对 He^4 , 但由于 He^4 液体分子间有较强的相互作用, 所以很难看成是纯的 BEC. 而后人又在自旋极化氢(H_2)中寻找 BEC^[5], 但没有成功. 后来又把氧化亚铜中的激子作为候选者^[6]于 1993 年获得成功^[7], 但由于相互作用很复杂, 所以对 BEC 的研究很难深入进行. 随着激光捕获和冷却原子技术的发展, 终于在 1995 年实现了原子的 BEC. 与普通自由空间中的 BEC^[4]相比, 捕获原子的 BEC 有如下特点: (1) 它是在捕获原子中实现的 BEC, 原子是凝聚在捕获位势中, 这个位势可以等价于各向异性的谐振子势. 对钠原子气体来说, 与捕获位势等价的谐振子势在 x , y 和 z 方向的频率分别为^[3] $\omega_x = 745 \text{ Hz}$, $\omega_y = 235 \text{ Hz}$ 和 $\omega_z = 410 \text{ Hz}$. (2) 捕获原子的数目是有限的. 大约有 10^9 个原子被捕获在位势中, 而凝聚的原子数目约为 2000^[1]和 10000^[2]之间.

在托马斯-费米(Thomas-Fermi)近似下, de Groot^[8]和 Bagnato^[9]等人已对外势中玻色子的凝聚问题作了研究, 他们发现体系的临界温度, 比热及临界指数都依赖于位势的形状. 而且对外势中的玻色子来说, 在低维情况下也有 BEC^[10]. 但上述研究工作都是在热力学极限下($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = \text{常数}$)进行的. 而实验上的研究对象(大约 10^9 个原子)要远远偏离该极限. 我们利用高温展开方法确定有限数目原子体系的态密度. 利用该态密度研究了体系的临界温度及临界温度附近体系的比热行为, 讨论原子间的相互作用对原子 BEC 的影响, 并在定域密度近似下(Local density approximation)研究原子的空间分布.

2 体系的态密度

考虑 N 个无相互作用的原子, 它们被捕获在谐振子势

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (1)$$

中. 式中 m 表示原子质量, ω_i , $i = x, y, z$ 分别表示谐振子势在 x, y 和 z 方向的频率, 可由实验条件完全确定. 处于该势中的原子具有能级

$$E_N = E(n_x, n_y, n_z) = \sum_{i=x, y, z} \hbar \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

当温度降低到某一临界温度时, 原子开始在基态 $n_i (i = x, y, z) = 0$ 上凝聚. 该体系的正则系综配分函数为 ($\hbar = 1$)

$$Q(\beta) = \sum_N e^{-\beta E_N} = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} e^{-\beta(n_x \omega_x + n_y \omega_y + n_z \omega_z)} = \prod_{i=x, y, z} \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_i}}. \quad (3)$$

这里已除去了基态对配分函数的贡献, 因为原子将凝聚到该态上, 所以它起着非常重要的作用, 在下面的计算中我们将单独考虑它的贡献. 原子 BEC 实验温度范围是 $100 \mu\text{K} \sim 100 \text{nK}$, 有 BEC 迹象时温度约在 100nK . 所以整个原子 BEC 实验的温度比 $\omega_i / k_B \sim \text{nK}$ 大得多, 即 $\beta \omega_i$ 是一个小量, 我们把(3)式对该小量展开或称为高温展开

$$Q(\beta) \simeq A_2 \beta^{-3} + A_1 \beta^{-2} + A_0 \beta^{-1} + A_{-1} + O(\beta), \quad (4)$$

这里

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{\omega_x \omega_y \omega_z}, \\ A_1 &= \frac{1}{2} A_2 (\omega_x + \omega_y + \omega_z), \\ A_0 &= \frac{1}{12} A_2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 + 3 \omega_x \omega_y + 3 \omega_y \omega_z + 3 \omega_z \omega_x), \\ A_{-1} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{24} (\omega_x / \omega_y + \omega_x / \omega_z + \omega_y / \omega_z + \omega_y / \omega_x + \omega_z / \omega_x + \omega_z / \omega_y), \end{aligned} \quad (5)$$

$\beta = k_B T$, k_B 为玻尔兹曼常数. 这里用到的高温展开方法的适用条件与定域密度近似的适用条件是相同的, 即 $\beta \omega_i \ll 1 (i = x, y, z)^{[11]}$. 也就是 BEC 实验的温度远远大于 ω_i / k_B . 这个条件在整个 BEC 实验中都是满足的. 配分函数的主要贡献来自于(4)式的第一项, 它近似为第二项的 $k_B T / \omega_i (i = x, y, z)$ 倍, 同样第二项是第三项的 $k_B T / \omega_i (i = x, y, z)$ 倍. 从另一方面来说, 体系的正则系综配分函数还可以由下式确定^[12]:

$$Q(\beta) = \sum_N e^{-\beta E_N} = \int_{\epsilon_0}^{\infty} e^{-\beta E} \rho(E) dE. \quad (6)$$

这里, $\epsilon_0 = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y + \omega_z)$ 表示体系的基态能, $\rho(E)$ 表示体系的态密度, 它可以展开为

$$\rho(E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n E^n. \quad (7)$$

从(4)式和(5)式我们可以看出, 展开(7)式中不能含有 E 的分数次幂, 或者说 E 的分数

次幂系数应为 0, 把(7)式代入(6)式可以得到

$$Q(\beta) = (B_0 + B_1 \epsilon_0 + B_2 \epsilon_0^2) \beta^{-1} + (B_1 - 2B_2 \epsilon_0) \beta^{-2} + 2B_2 \beta^{-3} + \dots, \quad (8)$$

比较(4), (5)和(8)式, 得到

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 - \epsilon_0 A_1 - \epsilon_0^2 A_2, \\ B_1 &= A_1 + \epsilon_0 A_2, \\ B_2 &= 0.5 A_2. \end{aligned} \quad (9)$$

由此看出, 在态密度的展开(7)式中, 系数为 B_0, B_1, B_2 的项是主要的, 即

$$\rho(E) = B_0 + B_1 E + B_2 E^2. \quad (10)$$

(10)式中的第三项与热力学极限下的结果相同, 第一项和第二项则是有限粒子数带来的修正. 它将导致临界温度的降低和低温比热行为的改变.

利用同样的方法不难得出, 在定域密度近似下各向同性捕获势中单粒子的维格纳函数的头两项为

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = b_0 + b_1 \frac{1}{E(\mathbf{p}, \mathbf{r})}. \quad (11)$$

这里

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}^2, \\ b_0 &= \frac{1}{16\pi^3}, \quad b_1 = \frac{3\omega}{8\pi^3}. \end{aligned} \quad (12)$$

在第五节中我们将利用此式来确定捕获原子的空间分布.

3 体系的临界温度及比热

众所周知, 理想玻色体系能级 E_i 上的粒子数由玻色分布

$$N(E_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1} \quad (13)$$

给出. 式中 μ 为粒子的化学势, 它满足

$$N = \sum_i N(E_i). \quad (14)$$

其中 N 为体系总的粒子数. 利用态密度的展开式(10), 可以把(14)式中对 i 的求和转化为对 E_i 的积分, 即

$$N = n_0 + \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\rho(E) dE}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1}. \quad (15)$$

n_0 表示基态上的粒子数. 值得注意的是, 与求解自由空间中的 BEC^[12] 问题不同, 这里取积分下限为体系的基态能 ϵ_0 . 这个积分下限的选择与态密度的计算公式(6)式是一致的: 认为能量小于 ϵ_0 的状态是不存在的, 值得注意的是, ϵ_0 是有确定值的, 而不是一个参数. 如果积分下限仍选为 0, 则引入了非物理的结果. 经过计算得

$$N = n_0 - \frac{B_0}{\beta} \ln \left[\beta \epsilon_0 \left(1 - \frac{\mu}{\epsilon_0} \right) \right] + B_1 \beta^{-2} \left\{ g_2(z) - \beta \epsilon_0 - \beta \mu \ln \left[\beta \epsilon_0 \left(1 - \frac{\mu}{\epsilon_0} \right) \right] \right\}$$

$$+ B_2 \beta^{-3} \Gamma(3) g_3(z) - B_2 \left\{ \frac{\epsilon_0}{2\beta} + \mu \left\{ \frac{\epsilon_0}{\beta} - \frac{\mu}{\beta} \ln \left[\beta \epsilon_0 \left(1 - \frac{\mu}{\epsilon_0} \right) \right] + \frac{\mu}{\beta} \ln(-\beta \mu) \right\} \right\}, \quad (16)$$

式中 $g_n(z)$ 表示玻色-爱因斯坦积分, $\Gamma(n)$ 是伽玛(Gamma)函数, $z = \exp(\beta\mu)$ 为逸度. 定义

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{2 B_2 g_3(1)} \right)^{1/3}, \quad (17)$$

它表示热力学极限下, 各向异性谐振子势中原子 BEC 临界温度^[9]. 由此我们可以得到基态的粒子数与总粒子数的比值随温度的变化

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \left[1 - \frac{B_0}{2 B_2} \frac{\ln \beta \epsilon_0}{g_3(1)} \beta^2 + \frac{B_1 g_2(1)}{2 B_2 g_3(1)} \beta - \frac{B_1 \epsilon_0}{2 B_2 g_3(1)} \beta^2 - \frac{\epsilon_0}{4 g_3(1)} \beta^2 \right]. \quad (18)$$

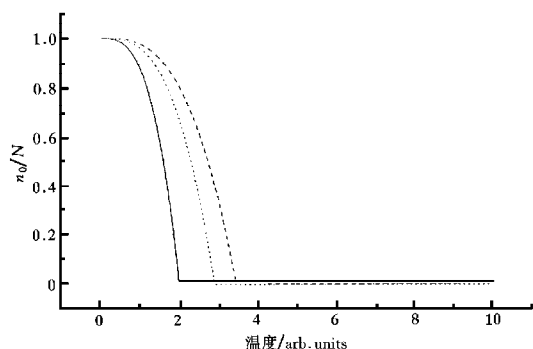


图 1 凝聚的原子数随温度的变化 实线: $N=2000$, 点线: $N=6000$, 长划线: $N=10000$

上式的数值结果如图 1 所示. 图 1 中的实线、点线和长划线分别对应不同的粒子数. 从图 1 可以看出: 总粒子数 N 越大, BEC 临界温度越高. 注意, 这个结论是在固定 ω_i 的条件下得出的 (对于确定的 BEC 实验, ω_i 总是确定的). 与普通的统计问题^[9]相对比, 不难发现 $\frac{1}{\omega_x \omega_y \omega_z}$ 相当于普通统计问题中的体积, 所以 N 增大相当于捕获原子的密度增大. 如果同时成比例的增大 A_2 , 则 T_c 趋于 T_0 . 这一结论也可

以从对临界温度的直接计算得出. 选定 $\mu=0$ 和 $n_0=0$ 来确定有限粒子数体系的临界温度 T_c , 则 T_c 可以通过 T_0 表示为

$$T_c = T_0 \left[1 + \frac{B_0}{6 B_2} \frac{\ln \beta_0 \epsilon_0}{g_3(1)} \beta_0^2 - \frac{B_1 g_2(1)}{6 B_2 g_3(1)} \beta_0 + \frac{B_1 \epsilon_0}{6 B_2 g_3(1)} \beta_0^2 + \frac{\epsilon_0}{12 g_3(1)} \beta_0^2 \right], \quad (19)$$

式中 $\beta_0 \equiv (k_B T_0)^{-1}$. 其中第二项小于 0, 因为 $\beta_0 \epsilon_0 \ll 1$, 后两项因为含有系数 $\beta_0 \epsilon_0$ 而远远小于前几项. 所以总体上来说有限粒子数情况下的 BEC 临界温度比热力学极限下的 BEC 临界温度要低. 它们的差别取决于位势的形状 (ω_i 的取值) 和粒子数的多少 (见 (19) 式). 一般说来, 实验上关心的是体系的比热随温度的变化行为. 因为通过它可以确定体系的相变温度, 研究体系的低温特性. 为了研究体系比热的温度特性, 首先确定体系的热力学势 U

$$U = n_0 \epsilon_0 + \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{E \rho(E)}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1} dE \quad (20)$$

精确到 $(\beta \epsilon)^0$, 即取 $\beta \mu \sim \beta \epsilon_0 \simeq 0$, 得到

$$U - \epsilon_0 n_0 = B_0 (\beta)^{-2} g_2(z) + 2 B_1 (\beta)^{-3} g_3(z) + 6 B_2 (\beta)^{-4} g_4(z). \quad (21)$$

其中第三项是热力学极限下的结果,其他项是有限粒子数效应带来的修正.由 $c = \frac{\partial U}{\partial T}$, 我们得到比热 c 在临界点附近的温度特性

$$c = \frac{1}{kT^2} [24 B_2(\beta)^{-5} g_4(1) + 6 B_1(\beta)^{-4} g_3(1) + 2 B_0(\beta)^{-3} g_2(1)], \quad T < T_c, \quad (22)$$

$$c = \frac{1}{kT^2} [24 B_2(\beta)^{-5} g_4(z) - 6 B_2(\beta)^{-5} g_3(z) \ln z + 6 B_1(\beta)^{-4} g_3(z) - 2 B_1(\beta)^{-4} g_2(z) \ln z + 2 B_0(\beta)^{-3} g_2(z) - B_0(\beta)^{-3} g_1(z) \ln z], \quad T > T_c. \quad (23)$$

当低于临界温度时, (22) 式中三项对比热的贡献近似为 $1: \beta \epsilon_0: (\beta \epsilon_0)^2$. 所以当温度低于临界温度时, c 对温度的依赖关系可近似为 T^3 . c 随温度变化的数值结果由图 2 给出. 图 2 中的实线、点线和长划线分别对应不同的总粒子数. 当 $T < T_c$ 时, c 随温度的增大而近似以 T^3 的速度增大. 当增大到

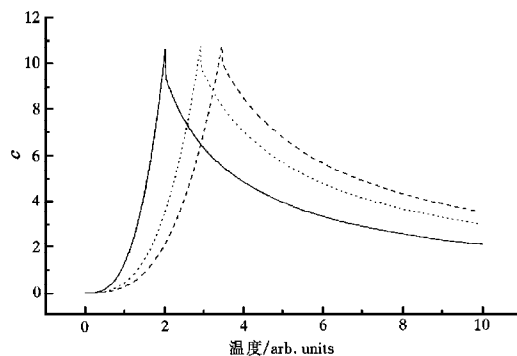


图 2 体系的比热随温度的变化 实线、点线和长划线分别对应不同总粒子数 N . 其取值与图 1 同

$$c_{\max} = \frac{1}{k_B N T_0^2} \left[\frac{2 B_0}{\beta_0^3} g_2(1) + \frac{6 B_1}{\beta_0^4} g_3(1) + \frac{24 B_2}{\beta_0^5} g_4(1) \right]$$

后, c 随温度的增大而开始减小. 且 c - T 曲线在 $T = T_c$ 处一阶导数不连续, 这表明体系在该处有“相变”.

4 原子间的相互作用对原子 BEC 的影响

原子 BEC 实验中, 捕获原子的密度在凝聚前约为 10^{12} cm^{-3} ^[2], 尽管原子气体很稀薄, 但原子间仍存在相互作用. 如锂在实验条件下的散射长度为 $a = (-27.3 \pm 0.8) a_0$ ^[2], a_0 为玻尔半径. 它表现为吸引的相互作用^[13]. 而对铷^[14]则具有正的散射长度, 表现为排斥的相互作用. 利用平均场近似可以证明, 原子间的相互作用正比于原子气体的密度 $n(\mathbf{r})$ 为 $\gamma n(\mathbf{r})$ ^[9]. 在低温条件下, γ 只依赖于两原子的 s -波散射长度 a , $\gamma = 2\pi \hbar^2 a / m$, m 为原子的质量. 在定域密度(LDA)(或托马斯-费米)近似下^[11], 原子的密度由下式给出

$$n(\mathbf{r}) = \exp(-\beta V(\mathbf{r})) / \lambda^3. \quad (24)$$

这里 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ 是平均热波长, $V(\mathbf{r})$ 表示捕获势, 在我们的问题中, 它由(1)式给出.

定域密度近似(LDA)成立的条件是 $\beta \omega_i \ll 1$ ($i = x, y, z$)^[15], 显然, 对于研究的对象来说, LDA 是一个很好的近似. 在考虑原子间相互作用时有两个小量, 一个是 γ -相互作用常数, 另一个是 $\beta \omega_i$ ($i = x, y, z$). 精确到 $(\gamma / \lambda)^2$ 或 $(\omega_i / k_B T)^2$, 可以把原子间的相互作用能简单近似为 $\frac{\gamma}{\lambda^3} (1 - \beta V(\mathbf{r}))$, 此时捕获原子的能谱为

$$E_N = E(n_i) = \sum_i \hbar \Omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma}{\lambda^3},$$

这里 $\Omega_i = \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda^3} \beta \right) \omega_i$. 利用上节相同的方法, 可以得到考虑原子间相互作用后的转变温度 T_c^γ

$$T_c^\gamma = T_c \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda_0^3} \frac{1}{k_B T_0} \right). \quad (25)$$

式中 T_c 由(19)式给出, $\lambda_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T_0}}$. 从(25)式中我们可以看出, 原子间的相互作用改变原子 BEC 临界温度. 如果原子间的散射长度为正的, 则原子间的相互作用降低 BEC 临界温度. 如果原子间具有吸引的相互作用, 则使 BEC 临界温度升高.

5 原子的空间分布

现已有很多文献讨论捕获原子的空间分布^[15,17]. 它们中有的利用 Gross-Pitaevskii 方程^[17], 有的忽略有限粒子数效应^[15]. 下面在 LDA 下讨论有限粒子数效应及原子间的相互作用对非凝聚原子空间分布的修正. 相空间中粒子数的分布为^[9,11]

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\xi e^{-\beta \epsilon_p}}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_p}}. \quad (26)$$

这里 $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$, $\xi = z e^{-\frac{1}{2}\beta m \omega^2 r^2}$ 叫作定域逸度. 把(26)式对动量积分, 可以得到非凝聚原子的空间分布

$$n(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\xi^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}} - 1} d\mathbf{p}, \quad (27)$$

把(11)式代入(27)式得到

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) = & \frac{\sqrt{2m}}{4\pi^2} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{\xi e^{-\beta x}}{1 - \xi e^{-\beta x}} dx \\ & + \frac{3\omega\sqrt{2m}}{2\pi^2} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x + 0.5 m \omega^2 r^2} \frac{\xi e^{-\beta x}}{1 - \xi e^{-\beta x}} dx, \end{aligned} \quad (28)$$

当 $T \leq T_c$ 时, 化学势 μ 为 0, 这时(28)式成为

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{2m\pi}}{8\pi^2} \beta^{-\frac{3}{2}} g_{\frac{3}{2}}(\xi) - \frac{3\omega\sqrt{2m}}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_\beta^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{\xi e^{-\beta_1 x}}{1 - \xi e^{-\beta_1 x}} dx d\beta_1 = n_0(\mathbf{r}) + n'(\mathbf{r}). \quad (29)$$

此式中的第一项是大粒子数极限下的结果, 第二项是有限粒子数对原子空间密度分布的修正, 它正比于捕获势的频率 ω . 从式中还可以看出, 有限粒子数的修正项小于 0, 即降低原子的空间分布密度. 如果考虑原子间的相互作用, 相空间中粒子的分布为^[18]

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\xi e^{-\beta \epsilon_p}}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_p}} - 4a\lambda^2 n(\mathbf{r}) \frac{\xi e^{-\beta \epsilon_p}}{(1 - \xi e^{-\beta \epsilon_p})^2}, \quad (30)$$

此式对原子间具有排斥相互作用情况成立. 进一步计算得到

$$n(r) = n_0(r) + n'(r) - 4a\lambda^2 n_0(r) \frac{\sqrt{2m\pi}}{\pi\beta^2} g_{\frac{1}{2}}(\xi). \quad (31)$$

式中 λ 为平均热波长, a 为散射长度. 此式表明, 原子间的相互作用也降低原子的空间分布密度.

6 结果与讨论

利用高温展开方法研究了捕获势中有限数目原子的 BEC. 结果表明有限数目原子的 BEC 临界温度及原子的空间分布密度比热力学极限下的临界温度要小, 减小的数值依赖于捕获势的形状和捕获的原子数. 让我们简单估计一下有限粒子数效应引起的临界温度的改变. (19) 式中对 T_c 起主要修正作用的是第二项和第三项, 它们的贡献在量级上是相同的, 如果取 $T_0 \sim 100$ nK, 则 $T_c \simeq 85$ nK, 改变量约为 T_c 的 15%. 虽然减小的数值比较小, 但它是可以观测的^[16]. 低温时 ($T < T_c$) 捕获原子的比热行为不再是 $T^{3/2}$, 而是含有多种成分 T^3 , T^2 , T . 三种成分的比近似为 $1 : \beta\epsilon : (\beta\epsilon)^2$. c - T 曲线在 $T = T_c$ 处达最大值, 且在此处一阶导数不连续, 属“三级相变”. 严格地说, 这里提到的 BEC 不能叫相变, 因为它不是一种宏观的粒子数效应. 原子间的相互作用可以提高或降低 BEC 临界温度. 近期的研究工作表明, 不仅捕获原子的数目可以影响原子的 BEC, 体系的边界对原子的 BEC 也有明显的影响^[19], 与有限数目原子效应相反, 它将提高原子 BEC 临界温度.

感谢吉林大学苏君臣先生的建议及中国科学院理论物理研究所孙昌璞教授的有益讨论.

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269**(1995), 198.
- [2] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 1687.
- [3] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 3969.
- [4] S. N. Bose, *Z. Phys.*, **26**(1924), 178; A. Einstein, *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, (1924), p. 261.
- [5] C. E. Hecht, *Physica*, **25**(1959), 1159.
- [6] D. Hulin, A. Mysyriwucz, C. B. Guillaume, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 1970.
- [7] J. L. Lin, J. P. Wolfe, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 1222.
- [8] S. R. de Groot, G. J. Hooyman, C. A. ten Seldam, *Proc. R. Soc. London Ser.*, **A203**(1956), 266.
- [9] V. Bagnato, D. E. Pritchard, D. Kleppner, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 4354.
- [10] V. Bagnato, D. Kleppner, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 7439.
- [11] T. T. Chou, Chen Ning Yang, L. H. Yu, *Phys. Rev.*, **A53**(1996), 4257.
- [12] F. London, *Superfluids II* (Wiley, New York, 1954);
K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1987);
L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Volume 5: Statistical Physics* (Pergamon, London, 1959).
- [13] R. Cote *et al.*, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 399; A. J. Moerdijk *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 40; *Phys. Rev. Lett.*, **73**(1994), 518.
- [14] G. F. Gribakin, V. V. Flambaum, *Phys. Rev.*, **A48**(1995), 546.
- [15] J. Oliva, *Phys. Rev.*, **B39**(1989), 4197 and Therein.

- [16] W. Ketterle, N. J. van Druten, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 656.
- [17] A. Griffin, *Phys. Rev.*, **B53**(1996), 9341; L. You, W. Hoston, M. Levenstein, *Phys. Rev.*, **A55**(1997), R1581; E. Lundh, C. J. Pethick, H. Smith, *Phys. Rev.*, **A55**(1997), 2126.
- [18] T. T. Chou, C. N. Yang, L. H. Yu, *Phys. Rev.*, **A55**(1997), 1179.
- [19] S. Grossmann, M. Holthaus, *Z. Phys.*, **B97**(1995), 319.

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION IN FINITE-NUMBER TRAPPED ATOMS

YI XUE-XI

(*Institute of Theoretical Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024;*

Department of Physics, Jilin University, Changchun 130023)

(Received 7 September 1998; revised manuscript received 12 October 1998)

ABSTRACT

The BEC in finite-number trapped atoms is investigated in this paper. The results show that the transition temperature is decreased by the finite-number effect, and the interactions between the atoms change the transition temperature, too. The specific heat below the transition point is no longer proportional to $T^{3/2}$. In addition to the above effects, the distribution of the trapped atoms depend on its number. The repulsive interaction between the atoms also dilute the density of the atoms.

PACC: 0530; 6460; 3280