

转动变质量系统的相对论性动力学方程和变分原理

方建会

(石油大学应用物理系, 山东东营 257062)

(1999 年 9 月 19 日收到)

将经典质量的变化和质量随速度变化这一相对论效应同时考虑, 建立定轴转动变质量系统的相对论性基本动力学方程, 达朗贝尔(d'Alembert)原理及 Lagrange 方程.

PACC: 0330

1 引 言

随着科学和技术的进步, 越来越多的实验现象与高速转动问题有关. 研究高速转动问题需要考虑相对论效应. Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论^[1,2]. 本文将经典质量的变化和相对论效应引起的质量随速度的变化同时考虑, 建立定轴转动变质量系统的相对论性基本动力学方程. d'Alembert 原理及 Lagrange 方程.

2 相对论性基本动力学方程

设力学系统由 N 个变质量质点组成, 在 t 时刻静止质量为 m_{oi} 的质点以速度 v 运动, 另一静止质量为 Δm_{oi} 的微粒以速度 u_i 运动, 在 t 时刻后的 Δt 时间内两者合并, 则其相对论性基本动力学方程为^[3]

$$m_{oi} \frac{d}{dt} \left[\frac{v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} \right] = F_i + \Phi_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

式中 m_{oi} 为变量, $\Phi_i^* = \dot{m}_{oi} \left[\frac{u_i}{\sqrt{1 - u_i^2/c^2}} - \frac{v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} \right]$ 为相对论性反推力. (1) 式可改写为

$$\frac{d}{dt} (m_i v_i) - \frac{\dot{m}_{oi} v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + \Phi_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

其中 $m_i = \frac{m_{oi}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$, $F_i^{(1)} + F_i^{(2)} = F_i$, $F_i^{(1)}$ 和 $F_i^{(2)}$ 分别为主动力和约束反力.

现在研究上述变质量系统作定轴转动(各质点绕转轴作圆周运动, 微粒沿切向并入或分离)的情况. 假设质点 m_{oi} 绕定轴转动的角速度为 ω_i , 相对转轴的矢径为 r_i . 以 r_i 左叉乘(2)式得

$$r_i \times \frac{d}{dt} (m_i v_i) - r_i \times \frac{\dot{m}_{oi} v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = r_i \times (F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + \Phi_i^*). \quad (3)$$

由(3)式可得到

$$\frac{d}{dt} (m_i r_i v_i) - \frac{\dot{m}_{oi} r_i v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = M_i + M_i' + M_i^*, \quad (4)$$

式中 M_i , M_i' 和 M_i^* 分别为 $F_i^{(1)}$, $F_i^{(2)}$ 和 Φ_i^* 对转轴的力矩.

由于 $v_i = r_i \omega_i$, 因此(4)式可写为

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_{oi} r_i^2 \omega_i}{\sqrt{1 - r_i^2 \omega_i^2/c^2}} \right\} - \frac{\dot{m}_{oi} r_i^2 \omega_i}{\sqrt{1 - r_i^2 \omega_i^2/c^2}} = M_i + M_i' + M_i^*. \quad (5)$$

我们令

$I_{oi} = r_i^2 m_{oi}$ 为经典(静止)转动惯量.

$\Gamma_i = \frac{c}{r_i} = \sqrt{\frac{E_{oi}}{I_{oi}}}$ (其中 $E_{oi} = m_{oi} c^2$) 为极限角速度^[1].

$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}}$ 为相对论性转动惯量^[1].

则(5)式可写为

$$\frac{d}{dt} (I_i \omega_i) - \frac{\dot{I}_{oi} \omega_i}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}} = M_i + M_i' + M_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

其中的相对论性反推力矩 M_i^* 可写为

$$M_i^* = \dot{I}_{oi} \left[\frac{\Omega_i}{\sqrt{1 - \Omega_i^2/\Gamma_i^2}} - \frac{\omega_i}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}} \right],$$
$$\Omega_i = \frac{u_i}{r_i}.$$

我们称(6)式为定轴转动变质量系统的相对论性基本动力学方程.

3 相对论性 d'Alembert 原理及 Lagrange 方程

将方程(6)乘以 $\delta\theta_i$ (θ_i 为角坐标) 后对 i 求和, 在理想约束条件 $\sum_{i=1}^N M_i' \delta\theta_i = 0$ 下, 可得到

$$\sum_{i=1}^N \left[-\frac{d}{dt} (I_i \omega_i) + \frac{\dot{I}_{oi} \omega_i}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}} + M_i + M_i^* \right] \delta\theta_i = 0. \tag{7}$$

我们称(7)式为定轴转动变质量系统的相对论性 d'Alembert 原理.

设系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s = 1, 2, \cdots, n$) 确定, 则第 i 个质点的角坐标为

$$\theta_i = \theta_i(q_s, t). \tag{8}$$

由此可以得到

$$\delta\theta_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s} = \frac{\partial\omega_i}{\partial \dot{q}_s},$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s} = \frac{\partial\omega_i}{\partial \dot{q}_s}.$$

类似于文献[4], 我们引入定轴转动变质量系统的相对论性 Lagrange 函数

$$\mathcal{L}_r = - \sum_{i=1}^N I_{oi} \Gamma_i^2 \sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}, \tag{10}$$

假设 m_{oi} 只是时间 t 的函数, 即 $m_{oi} = m_{oi}(t)$, 于是 $I_{oi} = I_{oi}(t)$, 则

$$\frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^N I_i \omega_i \frac{\partial\omega_i}{\partial q_s}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{i=1}^N I_i \omega_i \frac{\partial\omega_i}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (I_i \omega_i) \frac{\partial\omega_i}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^N I_i \omega_i \frac{d}{dt} \frac{\partial\omega_i}{\partial \dot{q}_s}. \tag{13}$$

以 δq_s 乘(12)式后对 s 求和, 并注意到(9), (10)式可得到

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (I_i \omega_i) \delta\theta_i = \sum_{s=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial q_s} \right] \delta q_s. \tag{14}$$

将(14)式代入(7)式得定轴转动变质量系统的相对论性 d'Alembert 原理的 Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial q_s} + G_s + G_s^* \right] \delta q_s = 0, \tag{15}$$

其中 $G_s = \sum_{i=1}^N M_i \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s},$

$$G_s^* = \sum_{i=1}^N \left[M_i^* + \frac{\dot{I}_{oi} \omega_{oi}}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\Gamma_i^2}} \right] \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}.$$

若系统受到的约束是完整约束, 由(15)式可得到定轴转动变质量系统的相对论性 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial q_s} = G_s + G_s^* \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{16}$$

4 讨 论

本文的结果具有普遍意义, 对相对论情况和经典情况, 变质量系统和常质量系统都适用. 当 $\omega_i \ll \Gamma_i, \Omega_i \ll \Gamma_i$ 时, 本文结果化为定轴转动变质量系统的经典力学结果[5]. 当 m_{oi} 为常量时, 本文结果化为定轴转动常质量系统的相对论结果. 当 m_{oi} 为常量, $\omega_i \ll \Gamma_i, \Omega_i \ll \Gamma_i$ 时, 本文结果化为定轴转动常质量系统的经典结果.

- [1] M. Carmeli, *Foundations of Physics*, **15**(8)(1985), 889.
- [2] M. Carmeli, *International Journal of Theoretical Physics*, **25**(1)(1986), 89.
- [3] J. H. Fang, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1389 (in Chinese) [方建会, 物理学报, **48**(1999), 1389].
- [4] Landau, *Field Theory* (The People Educational Publishing House, Beijing, p. 31–37) (in Chinese) [朗道, 场论(人民教育出版社, 北京, 1959), 31–37].
- [5] Lai-wu, Yang, Feng-xiang Mei, *Mechanics of Variable Mass System* (Beijing Institute of Technology Press, Beijing 1989) p. 54–59, 93–95 (in Chinese) [杨来伍、梅凤翔, 变质量系统力学(北京理工大学出版社, 北京, 1989), 54–59, 93–95].

RELATIVISTIC DYNAMIC EQUATION AND VARIATIONAL PRINCIPLE FOR ROTATIONAL VARIABLE MASS SYSTEM

FANG JIAN-HUI

(*Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying 257062, China*)

(Received 19 September 1999)

ABSTRACT

In this paper, Simultaneously considering the problem of classical variable mass and the relativistic effect of mass variation with velocity, the fundamental relativistic equation of dynamics, Dalembert principle and Lagrange equation for fixed-axis rotational variable mass system are built.

PACC : 0330