

一个二维分段光滑映象中的边界激变^{*}

马明全 王文秀 何大韧

(扬州大学理学院物理系 扬州 225002)

(2000 年 2 月 12 日收到 2000 年 4 月 26 日收到修改稿)

解析地讨论一个冲击振子模型中的边界激变特征,证明了这类分段光滑二维映象中激变的生存时间标度律为 $\tau \sim \epsilon^{-\gamma}$, 而 $\gamma = \frac{\ln|\beta_2|}{\ln|\beta_1\beta_2|}$ (β_1, β_2 分别是混沌吸引子吸引域边界上鞍点的不稳定和稳定本征值), 这与处处光滑二维映象中相应的规律完全不同.

关键词: 激变, 分段光滑映象, 生存时间标度律

PACC: 0545

1 引 言

非线性动力学系统中系统参量的变化可能使混沌吸引子突然消失、扩张或合并, 这类现象称为激变^[1-3]. 边界激变是描述混沌吸引子突然消失或产生的激变. Grebogi 等^[3]在 1987 年解析地得出了处处光滑映象中边界激变后生存时间的标度规律为:

$\tau \sim \epsilon^{-\gamma}$, $\gamma = \frac{\ln|\beta_2|}{\ln|\beta_1\beta_2|}$ (β_1, β_2 分别是混沌吸引子吸引域边界上鞍点的不稳定和稳定本征值, ϵ 为控制参量). 一个分段光滑的映象中此标度关系可能发生变化. 本文将借助于一个二维冲击振子模型对分段光滑映象中边界激变问题进行较为详细的讨论.

2 系 统

最简单的一种冲击振子模型如(1)(2)式所示^[4], 它描述一个在一定振动时与刚性障碍物碰撞的线性弹簧振子的动力学行为.

$$x_{n+1} = Ay_n, \quad (1)$$

$$y_{n+1} = By_n + x_n + E \quad y_n \leq 0,$$

$$x_{n+1} = Ay_n,$$

$$y_{n+1} = B_1\sqrt{y_n} + x_n + E \quad y_n > 0. \quad (2)$$

在本文中取 $-1 < A < 0, B_1 < 0$.

映象(1)的一阶不动点(可称为下不动点, 失稳成为一个鞍点时则称下鞍点)为

$$x^* = \frac{AE}{1-A-B},$$

$$y^* = \frac{E}{1-A-B}.$$

若 $B^2 + 4A \geq 0$, 则该不动点失稳的条件为

$$\left| \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4A}}{2} \right| > 1.$$

映象(2)的一阶不动点(可称为上不动点)为

$$x^* = Ay^*,$$

$$\sqrt{y^*} = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 + 4(1-A)E}}{2(1-A)}.$$

若 $\frac{B_1^2}{4y^*} + 4A \geq 0$, 则该不动点失稳的条件为

$$\left| \frac{\frac{B_1}{2\sqrt{y^*}} \pm \sqrt{\frac{B_1^2}{4y^*} + 4A}}{2} \right| > 1. \quad (3)$$

3 对边界激变的数值调研

取 $A = -0.5, B = 1.6, B_1 = -0.2$, 映象(1), (2)的上、下两个不动点均失稳的条件为: $E < 0.02$. 我们的数值计算显示在此参数范围内出现一个混沌吸引子. 而且, 混沌吸引子就是处于吸引域边界上的下鞍点的不稳定流形的闭包, 而其吸引域就是此鞍点的稳定流形的闭包^[5].

图 1 显示了上、下不动点失稳后下鞍点的不稳定流形、稳定流形及混沌吸引子.

我们发现在 E 小于某一 E_c 值时, 混沌吸引子突然消失, 即发生了激变. 激变的准确临界值为 $E_c = 0.001935$ (此临界值是去掉 2×10^6 的瞬态后的计

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 19975039)资助的课题.

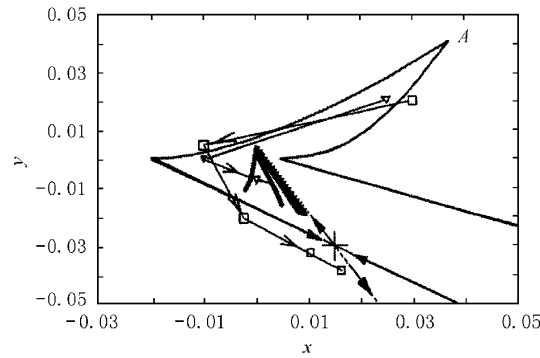


图1 映象(1)(2)在 $A = -0.5, B = 1.6, B_1 = -0.2, E = 0.003$ 时的混沌吸引子以及下鞍点的稳定流形与不稳定流形(图中+为下鞍点,实线为稳定流形,点线为不稳定流形,带虚箭头的实细线连接的点为典型的两个迭代序列,稳定流形及不稳定流形的数值计算采用文献[6]中的方法(精度 10^{-7})算结果).此时混沌吸引子的“上端点”(即混沌吸引子上 y 值最大的一点)与它的吸引域边界发生了碰撞.此外,在 $E = 0.001935$ 时下鞍点的稳定流形与不稳定流形在我们的精度范围 10^{-7} 内相切.所以此参数下混沌吸引子发生的是同宿相切的边界激变(即吸引域边界上的一个鞍点的稳定流形与不稳定流形在临界参数时相切).同时,混沌吸引子的“上端点”(也是混沌吸引子与吸引域边界的碰撞点)位于映象的不可微点($y = 0$)的一次映象处($x = A \times 0 = 0$).

当 $0 < E < 0.001934$ 时,从原混沌吸引子的吸引域中出发的迭代在经历一段瞬态混沌后迭代向无穷远吸引子,如图2所示.

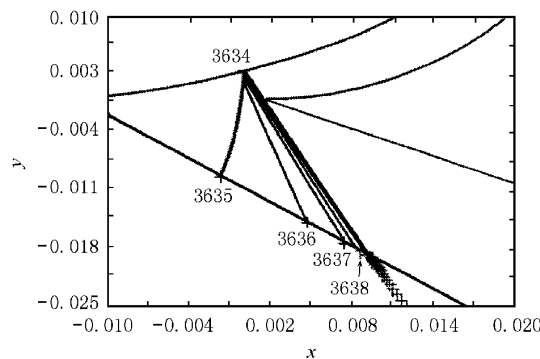


图2 映象(1)(2)在 $A = -0.5, B = 1.6, B_1 = -0.2, E = 0.0019$ 时初值为 $(10^{-16}, 10^{-16})$ 的一个典型的瞬态混沌,此迭代序列在 3634 步,越出吸引域边界(图中实线为吸引域边界,实点为原吸引域内的迭代,+为越出吸引域边界的迭代,数字为相应的迭代步数)

我们数值计算了 $E \rightarrow E_c$ 时的生存时间 $\tau_c | E -$

$E_c|$ 的关系,结果表明 τ 遵从普适标度律,即 $\tau \sim \epsilon^{-\gamma}$, 这里 $\epsilon = |E - E_c|$, 而且标度因子 γ 等于 1.22824. 如图3所示.

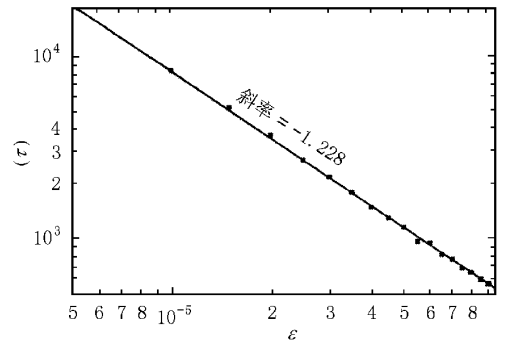


图3 映象(1)(2)在 $A = -0.5, B = 1.6, B_1 = -0.2$ 时在激变后吸引子范围内瞬态混沌的平均生存时间 τ 的标度规律(图中的每一个数据点为随机在 $|x, y| < E$ 的区域中选取 2000 个初值所作的平均值.图中用最小二乘法数值拟合直线斜率为 -1.22824)

4 边界激变临界值的解析计算

当 $A + B > 1$ 且 $B < 2$ 且 $B^2 + 4A \geq 0$ 时,下不动点失稳成为一个鞍点.此时,可以证明下鞍点的不稳定流形主要部分的解析式为^[5]

$$\begin{aligned} y &= c_2 x + d_2 \quad x \in [0, +\infty), \\ y &= B_1 \sqrt{\frac{x}{A}} + \frac{x}{Ac_2} + d_2 \quad x \in [Ad_2, 0], \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$c_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4A}}{2A}, \quad d_2 = \frac{1 - Ac_2}{1 - A - B} E = \frac{c_2}{1 + c_2} E.$$

而此鞍点的稳定流形主要部分的解析式为^[5]

$$\begin{aligned} x &= \frac{y - d_1}{c_1} \quad y \in (-\infty, 0], \\ x &= Ac_1 y - B_1 \sqrt{y} + d_1 - E \quad y \in [0, -\frac{d_1}{Ac_1}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x &= \left[\frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4Ac_1(d_1 - E - Ay)}}{2Ac_1} \right]^2 \\ &\quad - B_1 \sqrt{y} - E \quad y \in [0, -\frac{d_1}{Ac_1}], \\ x &= \left[\frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4Ac_1(d_1 - E - Ay)}}{2Ac_1} \right]^2 \end{aligned}$$

$$-By-E \quad y \in \left[-\frac{B_1\sqrt{\frac{-d_1}{Ac_1}}+E}{A}, 0\right],$$

其中

$$c_1 = \frac{B-\sqrt{B^2+4A}}{2A}, d_1 = \frac{1-Ac_1}{1-A-B}E = \frac{c_1}{1+c_1}E.$$

可以证明^[5],由(4)式描述的下鞍点的一段不稳定流形在 $x=0$ 处达到 y 的最大值,这就是混沌吸引子的“上端点”.纵坐标 y_1 为

$$y_1 = \frac{c_2}{1+c_2}E = \frac{E}{1-Ac_1}.$$

把 $x=0$ 代入(5)式,得到吸引域边界与 y 轴在 $y>0$ 区域中的交点的纵坐标 y_2 为

$$y_2 = \left[\frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4Ac_1(d_1 - E)}}{2Ac_1}\right]^2,$$

上端点与吸引域边界相碰的条件为 $y_1 = y_2$,因而可得到发生边界激变的临界参数为

$$E_c = \frac{B_1^2}{\left(1 - Ac_1\left\{\frac{1}{1+c_1} - \frac{Ac_1}{1-Ac_1}\right\}\right)^2}. \quad (6)$$

将各个参数值代入可得 $E_c=0.00193517$,与我们用数值方法去掉 2×10^6 的瞬态点后找到的临界参数值 $E_c=0.001935$ 符合得很好.

5 生存时间标度规律的解析讨论

模仿 Grebogi 等的工作^[3],我们用图 4 所示的草图来推导上述激变的标度率.把图 4 中下鞍点的一段不稳定流形 aoc 与线段 abc 所包围的阴影区中混沌吸引子的测度设为 $\mu(\epsilon)$.线段 abc 离下鞍点的稳定流形的距离设为 ϵ .因为这里 ϵ 很小,可以认为 $\mu(\epsilon) \sim \epsilon^{1.23}$.则当刚刚发生激变后, $|E-E_c|$ 很小时,有 $\epsilon \sim |E-E_c|$,并且迭代在激变前原吸引子范围的生存时间 τ 遵从标度规律 $\tau \sim |E-E_c|^{-1.23}$.如图(4)所示,令阴影区中的第二条水平线 def 离稳定流形的距离为 $\epsilon\beta_2$,则 $defod$ 所包围的范围内的混沌吸引子的测度为 $\mu(\epsilon\beta_2)$.把阴影区向后逆映射,把点 (a, b, c, d, e, f, o) 逆映射为 $(a', b', c', d', e', f', o')$,再把 $d'e'f'o'd'$ 进一步逆映射为 $d''e''f''o'd''$.则 $\overline{o'e'} * \beta_2^{-1} = \overline{o'e''}$, $\overline{f'o'd'} * \beta_1^{-1} = \overline{f''o'd''}$ (β_1, β_2 分别是下鞍点的不稳定、稳定本征值).由于 $\overline{oe} = \beta_2 \overline{ob}$,所以 $\overline{ob'} = \frac{\overline{oe'}}{\beta_2}$,因而 $\overline{o'e''} = \overline{ob'}$.由于下鞍点所在区域映射为线性的,所以曲线 $\overline{fod} = \beta_2 \overline{coa}$.类似

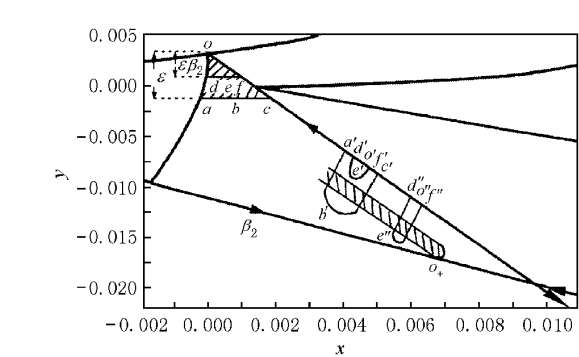


图 4 推导(11)式的示意图(图中的粗线为 $E=E_c$ 时的下鞍点的稳定流形与不稳定流形, o 点为二者的相切点,它正好位于不可微处 $y=0$ 的一次映象 $x_1=Ay_0=0$ 处)

地 $\overline{f'o'd'} = \beta_2 \overline{c'o'a'}$, 所以有 $\frac{\overline{c'o'a'} * \beta_2}{\beta_1} = \overline{f''o'd''}$. 即有

$$\overline{ob'} = \overline{o'e''}, \quad (7)$$
$$\frac{\overline{c'o'a'}}{\beta_1} = \overline{f''o'd''} \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (8)$$

设把以 o 为顶点的阴影区向前多次映射为以 o_+ 为顶点的阴影区,如图 4 所示.由于 $\frac{d\mu(\epsilon)}{d\epsilon} \sim \epsilon^{\gamma-1}$,所以混沌吸引子落在以 o_+ 为顶点的阴影区与 $d''o''f''e''d''$ 相截部分的下鞍点不稳定本征矢方向单位长度的测度是与 $a'o'c'b'a'$ 相截部分的测度的 $\beta_1^{1-\gamma}$ 倍.这一结论对阴影区的再次映射同样适用.这样由(8)式,有

$$\frac{\text{measure in}(d''o''f''e''d'')}{\text{measure in}(a'o'c'b'a')} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \beta_1^{1-\gamma}. \quad (9)$$

因为 $\text{measure in}(d''o''f''e''d'') = \text{measure in}(dofed) = \mu(\epsilon\beta_2)$,
 $\text{measure in}(a'o'c'b'a') = \text{measure in}(aocba) = \mu(\epsilon)$.将 $\mu(\epsilon) \sim \epsilon^\gamma$ 代入,可得

$$\frac{\text{measure in}(d''o''f''e''d'')}{\text{measure in}(a'o'c'b'a')} = \beta_2^\gamma. \quad (10)$$

结合(9)(10)式,有

$$\beta_2 = (\beta_1 \beta_2)^\gamma,$$

即得

$$\gamma = \frac{\ln |\beta_2|}{\ln |\beta_1 \beta_2|}. \quad (11)$$

在本文所取参数下,

$$\gamma = \frac{\ln |\beta_2|}{\ln |\beta_1 \beta_2|} = \frac{\ln \left| \frac{B - \sqrt{B^2 + 4A}}{2} \right|}{\ln |-A|} = 1.23163.$$

这与上述数值结果很好地符合.

将此结果与处处光滑的二维映象相比较 ,可以看出 ,一个分段光滑的映象在同宿相切的边界激变中 ,当稳定流形与不稳定流形的相切点为映象的不可微点或其映象点时 ,激变的标度因子是处处光滑的二维映象中同宿相切边界激变的标度因子的 2 倍 . 这说明了分段光滑映象中特征边界激变的独特性 .

[1] C. Grebogi ,E. Ott ,J. A. Yorke ,*Phys. Rev. Lett.* , **48**(1982) ,

1507 .

[2] C. Grebogi ,E. Ott ,J. A. Yorke ,*Physica* ,**D7**(1983) ,181 .
[3] C. Grebogi ,E. Ott *et al.* ,*Phys. Rev.* , **A36**(11)(1987) ,5365 .
[4] Wai Chin ,E. Ott *et al.* ,*Phys. Rev.* , **E50**(6)(1994) ,4427 .
[5] Wen-xiu Wang , Ming-quan Ma , Da-ren He , *Journal of Yangzhou University* (3)(2000)(in Chinese) [王文秀、马明全、何大韧 ,*扬州大学学报* (3)(2000)] .
[6] T. S. Parker ,L. O. Chua ,*Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* ,Springer-Verlag ,1989 .

BOUNDARY CRISIS IN A 2D PIECE-WISE SMOOTH MAP *

MA MING-QUAN WANG WEN-XIU HE DA-REN

(Department of Physics ,College of Science ,Yangzhou University ,Yangzhou 225002 ,China)

(Received 12 February 2000 ; revised manuscript received 26 April 2000)

ABSTRACT

This paper analytically discusses the characteristics of boundary crisis in a model of impact oscillator ,and proves that the scaling behavior of the life time after crisis follows the rule $\tau \sim \epsilon^{-\gamma}$ and $\gamma = \frac{\ln|\beta_2|}{\ln|\beta_1\beta_2|}$. Here β_1 and β_2 are the unstable and stable eigenvalues ,respectively ,of a saddle node on the basin boundary of a chaotic attractor . This rule is completely different from that in everywhere-smooth maps .

Keywords : crisis , piece-wise smooth map , scaling law of life time
PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975039) .