

$K(m, n)$ 方程的对称性约化*

王烈衍

(宁波大学物理系, 宁波 315211)

(1999 年 5 月 17 日收到)

利用对称性约化的直接法, 给出了具有非线性色散情况下的 $K(m, n)$ 模型的所有对称性约化. 从第一种约化方程的 Painlevé 性质分析可知, $K(m, n)$ 模型仅当 $m = n + 1$ 和 $m = n + 2$ 时是可积的. 特殊情况下(行波约化), 这种约化的解可用一个积分表示, 给出了 $K(m, 1)$ 和 $K(m, m)$ 的一般孤波解的明显表达式.

PACC: 0340K; 0365Ge

1 引 言

在非线性理论的研究中, 求解一个非线性偏微分方程是一件非常困难的工作. 通常一种有效的方法是利用对称性将高维的偏微分方程约化成低维的方程来求解. 在众多的对称性约化方法中, 所谓的 CK (Clarkson-Kruskal) 直接法是最简单有效的^[1, 2]. 如 Clarkson 等成功地将 $1 + 1$ 维的偏微分方程 (Boussinesq 方程, KdV 方程, Burgers 方程等等) 约化成了 Painlevé I, II, III 型方程等等. 这种方法也已被推广应用到了高维的非线性方程^[3].

在许多具体物理问题中, 孤子是由非线性自相互作用和线性色散相平衡而形成稳定状态的. 然而在另一些重要物理问题中, 色散并不是线性的. 在非线性质色散的情况下, 最简单的物理模型为所谓的 $K(m, n)$ 方程^[4], 即

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0. \quad (1)$$

当取 (m, n) 为 $(2, 1)$ 时即为标准的 KdV 方程 (m, n) 为 $(3, 1)$ 时即为通常的修正 KdV 方程. 在 $n \neq 1$ 的情况下, Philip 等研究了它们的分段连续可导的所谓 Compacton 的有趣性质. 如 Compacton 具有弹性碰撞等有趣的类似于孤子的性质. 然而我们尚未见这类方程处处连续可导的通常意义下的孤子解的报道. 本文利用对称性约化来给出 $K(m, n)$ 模型的所有对称性约化, 并给出在取特定 m, n 值时的一些有意义的精确解.

2 $K(m, n)$ 方程的对称性约化

利用 Clarkson 和 Kruskal 的直接方法, 将一般的对称性约化形式

$$u = U(x, t, w(z)), \quad z = z(x, t) \quad (2)$$

代入方程 (1), 用类似于文献 [1] 的方法可以证明, 只要取 u 为 w 的一次式

$$u = \alpha(x, t) + \beta(x, t)w(z), \quad (3)$$

即可得到方程 (1) 的所有对称性约化. 从 (3) 式可知在决定 α, β, z 时, 为了去掉等价的对称性约化可使用如下规则^[5]:

规则 1 若 $\beta = \beta_0(x, t)\Omega(z)$ 则可取 $\Omega(z) = \Omega_0$ 为任意常数.

(作代换 $w \rightarrow w(z)\Omega_0/\Omega(z)$).

规则 2 若 $\alpha = \alpha_0(x, t) + \beta(x, t)\Omega(z)$, 则可取 $\Omega = 0$.

(作代换 $w(z) \rightarrow w(z) - \Omega(z)$).

规则 3 若 $\Omega(z)$ 是可逆函数, 且 $\Omega(z) = z_0(x, t)$, 则可取

$$\Omega(z) = z = z_0(x, t).$$

(作代换 $z \rightarrow \Omega^{-1}(z)$).

将 (3) 式代入 (1) 式并取

$$u^m = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{(m-j)!j!} \alpha^{m-j} \beta^j w^j, \quad (4)$$

$$u^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \alpha^{n-j} \beta^j w^j, \quad (5)$$

可得

* 浙江省自然科学基金(批准号: 196003)资助的课题.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n+2} \frac{n(n+2)!}{(n-j+2)!j!} z_x^3 \alpha^{n-j+2} \beta^{j+1} w^j w''' \\
& + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{3n(n-1)(n+1)!}{(n-j+1)!j!} z_x^3 \alpha^{n-j+1} \beta^{j+2} w^j w' w'' \\
& + \sum_{j=0}^{n+2} \frac{3n(n+1)!}{(n-j+2)!j!} z_x \alpha^{n-j+1} \beta^j ((n-1) \\
& \cdot (n+2-j) \alpha_x \beta z_x + (jn+n+2-j) \alpha \beta_x z_x \\
& + (n+2) \alpha \beta z_{xx}) w^j w'' \\
& + \sum_{j=0}^n \frac{nn(n^2-3n+2)}{(n-j)!j!} z_x^3 \alpha^{n-j} \beta^{j+3} w^j w'^3 \\
& + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{3nn!}{(n-j+1)!j!} z_x \alpha^{n-j} \beta^{j+1} ((n-1)(n-2) \\
& \cdot (n+1-j) \alpha_x \beta z_x + (2n+jn-2j+2) \\
& \cdot \alpha \beta_x z_x + (n+1) \alpha \beta z_{xx}) w^j w'^2 + \beta^4 z_x w^3 w' \\
& + \alpha^3 \beta z_x w' + 3\alpha^2 \beta^2 z_x w w' + 3\alpha \beta^3 z_x w^2 w' \\
& + \sum_{j=0}^{m+2} \frac{m(m+2)!}{(m-j+2)!j!} z_x \alpha^{m-j+2} \beta^{j+1} w^j w' \\
& + \sum_{j=0}^{n+2} \frac{nn!}{(n-j+2)!j!} \alpha^{n-j} \beta^{j-1} ((n-1)(n-2) \\
& \cdot (n-j+2)(n-j+1) \alpha_x^2 \beta^2 z_x + (n-1) \\
& \cdot (nj+n-2j+1)(n-j+2) \alpha \alpha_x \beta \beta_x z_x \\
& + (n-1)(n+1)(n-j+2) \alpha \alpha_x \beta^2 z_{xx} \\
& + 3j(n-1)(nj+n+4-2j) \alpha^2 \beta_x^2 z_x \\
& + (n+1)(nj+n-j+2) \alpha^2 \beta \beta_x z_{xx} \\
& + (n-1)(n+1)(n-j+2) \alpha \alpha_x \beta^2 z_x \\
& + (n+1)(nj+n-j+2) \alpha^2 \beta \beta_{xx} z_x \\
& + (n+1)(n+2) \alpha^2 \beta^2 z_{xxx}) w^j w' \\
& + \beta^3 \beta_x w^4 + (3\alpha \beta^2 \beta_x + \alpha_x \beta^3) w^3 + (3\alpha^2 \beta \beta_x \\
& + 3\alpha \alpha_x \beta^2) w^2 + (\alpha^3 \beta_x + 3\alpha^2 \alpha_x \beta) w + \alpha^3 \alpha_x \\
& + \sum_{j=0}^{n+3} \frac{nn!}{(n-j+3)!j!} \alpha^{n-j} \beta^{j-3} ((n-1)(n-2) \\
& \cdot (n-j+3)(n-j+2)(n-j+1) \alpha_x^3 \beta^3 \\
& + 3j(n-1)(n-2)(n-j+3)(n-j+2) \\
& \cdot \alpha \alpha_x^2 \beta^2 \beta_x + 3j(j-1)(n-1)(n-2) \\
& \cdot (n-j+3) \alpha^2 \alpha_x \beta \beta_x^2 + (n-1)(n+1) \\
& \cdot (n-j+3)(n-j+2) \alpha \alpha_x \alpha_{xx} \beta^3 \\
& + 3j(n-1)(n+1)(n-j+3) \alpha^2 \alpha_x \beta^2 \beta_{xx} \\
& + j(j-1)(j-2)(n-1)(n-2) \alpha^3 \beta_x^3 + 3j(n \\
& -1)(n+1)(n-j+3) \alpha^2 \alpha_{xx} \beta^2 \beta_x + 3j(n-1) \\
& \cdot (n+1)(j-1) \alpha^3 \beta \beta_x \beta_{xx} + (n+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (n+2)(n-j+3) \alpha^2 \alpha_{xxx} \beta^3 + j(n+1)(n+2) \\
& \cdot \alpha^3 \beta^2 \beta_{xxx}) w^j + \sum_{j=0}^{m+3} \frac{m(m+2)!}{(m-j+3)!j!} \alpha^{m-j+2} \beta^{j-1} \\
& \cdot ((m+3-j) \alpha_x \beta + j \alpha \beta_x) w^j = 0, \quad (6)
\end{aligned}$$

其中“'”表示对 z 的导数,由(3)式的假设, w 仅是 z 的函数,因此(6)式的 w 的各类不同项的系数必然成比例,且比例系数仅为 z 的函数.分析(6)式的各项并利用 $k! = \Gamma(k+1)$ 及 $\Gamma(k+1) = \infty$ ($k < 0$) 的性质,可将(6)式写为

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^Q A_{ijpq} (w''') (w'') (w')^p w^q = 0, \quad (7)$$

$Q = \max[m+3, n+3],$

其中 $\max[m+3, n+3]$ 表示取 $(m+3)$ 和 $(n+3)$ 中大的一个,而相应的 A_{ijpq} 可以由(6)式读出.由于我们假设 w 仅是 z 的函数,(7)式应为仅是一个 w 对 z 的常微分方程.因此所有的 A_{ijpq} 只能是 z 的函数乘以一个公共的非 z 函数因子.从(6)式可知 $A_{10(n+2)}$ (即 $w''' w^{n+2}$ 项的系数)为 $n \beta^{n+3} z_x^3$. 根据标准的 CK 直接法^[1]和 Lou^[2]的讨论可知,如果 $z_x \neq 0$,可简单取 $n \beta^{n+3} z_x^3$ 为公共因子.而 $z_x = 0$ 的情况应另加讨论.下面我们就 $z_x \neq 0$ 和 $z_x = 0$ 两种情况分别加以讨论.

1) 当 $z_x \neq 0$ 时,取 $A_{10(n+2)}$ 为公共因子,则(7)式(从而(6)式)为常微分方程的必要条件为

$$\begin{aligned}
A_{ijpq} &= n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{ijpq}, \\
i &= 0, 1, j = 0, 1, p = 0, 1, 2, 3, \\
q &= 0, 1, \dots, \max[m+3, n+3], \quad (8)
\end{aligned}$$

其中 Γ_{ijpq} 为 z 的待定函数.取(8)式中 $i=1, j=0, p=0, q=n+1$ 时,具体的形式为

$$n(n+2) \alpha \beta^{n+2} z_x^3 = n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{10(n+1)}, \quad (9)$$

即

$$\alpha = \frac{\beta}{n+2} \Gamma_{10(n+1)}. \quad (10)$$

利用规则 2,则立刻可得

$$\alpha = 0, \quad \Gamma_{10(n+1)} = 0. \quad (11)$$

将(11)式代入(6)式可知(7)式中不为 0 的非平凡方程为

$$3n(n-1) \beta^{n+3} z_x^3 = n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{01(n+1)}, \quad (12)$$

$$3n(n z_{xx} \beta_x + \beta z_{xx}) \beta^{n+2} z_x = n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{01(n+2)}, \quad (13)$$

$$n(n^2-3n+2) \beta^{n+3} z_x^3 = n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{003n} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& 3n(n-1)(\beta z_{xx} + n \beta_x z_x) \beta^{n+2} z_x \\
& = n \beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{00(n+1)}, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\beta^4 z_t = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{0013}, \quad (16)$$

$$m\beta^{m+3} z_x = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{001(m+2)}, \quad (17)$$

$$n(3n(n-1)z_x\beta_x^2 + 3n(\beta_x z_x)_x + \beta^2 z_{xxx})\beta^{n+1} = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{001(n+2)}, \quad (18)$$

$$\beta^3 \beta_t = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{0004}, \quad (19)$$

$$n((n-1)(n-2)\beta_x^3 + 3(n-1)\beta_x\beta_{xx} + \beta^2\beta_{xxx})\beta^n = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{000(n+3)}, \quad (20)$$

$$m\beta^{m+2}\beta_x = n\beta^{n+3} z_x^3 \Gamma_{000(m+3)}. \quad (21)$$

从(17)式利用规则1即可得

$$\Gamma_{001(m+2)} = 1, \quad \beta = \left(\frac{n}{m}\right)^{1K(m-n)} z_x^{2K(m-n)}, \quad (22)$$

(13)式积分一次后的方程为

$$z_x \beta^n = \sigma_1(t) \exp \int^z \Gamma_{010(n+2)}(z') dz', \quad (23)$$

其中 $\sigma_1(t)$ 为 t 的任意函数. 将(22)式代入(23)式可得

$$z_x \exp \int^z \frac{n-m}{m+n} \Gamma_{010(n+2)}(z') dz' = \sigma_1^{m-n} K_{m+n} \left(\frac{m}{n}\right)^{nK(m+n)} \equiv \alpha(t). \quad (24)$$

将(24)式再积分一次并利用规则3即得

$$z = \alpha(t)x + \theta(t), \quad \Gamma_{010(n+2)} = 0, \quad \beta = \left(\frac{n\sigma^2}{m}\right)^{1K(m-n)}. \quad (25)$$

将(25)式代入(16)式得

$$\sigma_x x + \theta_t = n \left(\frac{n\sigma^2}{m}\right)^{(n-1)K(m-n)} \sigma^3 \Gamma_{0013}. \quad (26)$$

由于(26)式的左边仅是 x 的一次函数, 因此 Γ_{0013} 只能有 $az + b$ (a, b 为任意常数) 的形式. 将 $\Gamma_{0013} = az + b$ 代入(26)式并比较 x 的系数, 我们可得到决定 σ 和 θ 的两个方程:

$$\sigma_t = A_{mn} \sigma^{2(2m-n-1)K(m-n)}, \quad A_{mn} = an \left(\frac{n}{m}\right)^{(n-1)K(m-n)}, \quad (27)$$

$$\theta_t = (a\theta + b) \sigma^{(3m-n-2)K(m-n)} A_{mn} / a. \quad (28)$$

(27)和(28)式的一般解为

$$\sigma = \begin{cases} \left[A_{mn} \frac{3m-n-2}{n-m} (t-t_0) \right]^{n-mK(3m-n-2)} & a \neq 0, \\ k & a = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\theta = \begin{cases} -\frac{b}{a} + \lambda(t-t_0)^{n-mK(3m-n-2)} & a \neq 0, \\ \omega(t-t_0) & a = 0, \end{cases} \quad (30)$$

其中 k, λ, ω, t_0 为任意常数. 根据前面的结果, 我们可得 $z_x \neq 0$ 时不为零的 $\Gamma_{ijpq}(z)$ 有

$$\Gamma_{011(n+1)} = 3(n-1), \quad \Gamma_{003n} = (n-1)(n-2), \quad \Gamma_{0013} = az + b, \quad \Gamma_{001(m+2)} = 1, \quad \Gamma_{0004} = \frac{2a}{m-n}. \quad (31)$$

最后 w 满足的常微分方程为

$$3(n-1)w^{n+1}w'w'' + (az+b)w^3w' + w^{m+2}w' + (n-1)(n-2)w^n w'^3 + w^{n+2}w''' + \frac{2a}{m-n}w^4 = 0, \quad (32)$$

而相应的 $K(m, n)$ 方程的解为由 $u = \beta w(z)$ 给定及 β, z 由(25)(29)(30)式表示. 对于 $m = n$, 类似的计算表明, 仅有结果是取(29)(30)式中 $a = 0$ 的情况且取 $\beta = k^{-2/n}$, $\Gamma_{0004} = 0$, 最后的约化常微分方程为(32)式中没有最后一项的方程. 一般说来常微分方程约化(32)式仍然不一定是可积的. 利用标准的 Painlevé 分析法可知(32)式仅当 $m = n-1$ 和 $n-2$ 时是可以用泰勒级数求得一般解^[6]. 对于 $a = 0$ 的特殊情况(32)式的一般解可用下述一般的积分表达式表示:

$$\int^w \frac{\sqrt{m(m+n)(n+1)}w^{n-1}dw}{\sqrt{C_1 w^n + C_2 - 2bm(m+n)w^{n+1} - 3(n+1)w^{m+n}}} = z - z_0. \quad (33)$$

2) 当 $z_x = 0$ 时, 由于规则3, 可简单地取 $z = t$.

对于 $z = t$, 把(3)式代入方程(1), 并利用 $k! = \Gamma(k+1)$ 及 $\Gamma(k+1) = \infty$ ($k < 0$) 的性质可将方程(6)写为

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^J B_{ij} (w')^i w^j = 0, \quad J = \max[m+3, m+3]. \quad (34)$$

从(34)式可知 $B_{0(m+3)}$ (即 w^{m+3} 项的系数) 为 $m\beta_x\beta^{m+2}$, 可简单取 $m\beta_x\beta^{m+2}$ 为公共因子, 则(34)式为常微分方程的必要条件为

$$B_{ij} = m\beta_x\beta^{m+2}\Gamma_{ij} \quad i = 0, 1, j = 0, 1, \dots, \max[m+2, m+3]. \quad (35)$$

其中 Γ_{ij} 为 t 的待定函数. 取(35)式中 $i = 1, j = 3$ 和 $i = 0, j = m+2$ 时, 具体的形式为

$$\beta^4 = m\beta_x\beta^{m+2}\Gamma_{13}(t), \quad (36)$$

$$m(m+2)\alpha\beta_x\beta^{m+1} + m\alpha_x\beta^{m+2} = m\beta_x\beta^{m+2}\Gamma_{0(m+2)}(t). \quad (37)$$

将规则 1 应用于(36)式,可取 $\Gamma_{13}=1$,将规则 2 应用于(37)式可取 $\Gamma_{(m+2)}=0$ 并由此可得

$$\beta = \left(\frac{m-1}{m} (x + x_0(t)) \right)^{1/(m-1)}, \quad \alpha = \frac{\alpha_0(t)}{\beta^{m+2}}, \quad (38)$$

其中 $\alpha_0(t)$ 和 $x_0(t)$ 为待定的 t 的函数.将(38)式代入方程可知,要求(34)式对于任意的 x 成立唯一的解为

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 = \text{常数}, \quad \alpha_0(t) = 0, \\ \Gamma_{10} &= \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \Gamma_{0j} = 0 \\ (j &= 0, 1, \dots, \max[m+1, m+2]), \quad (39) \\ \Gamma_{13} &= 1, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{(n+3)} = \frac{n(n+1-m)(n+2-2m)}{m(m-1)(x+x_0)} \cdot \left[\frac{m-1}{m} (x+x_0) \right]^{n/(m-1)}.$$

由于假设 $\Gamma_{(n+3)}$ 仅为 t 的函数,因此这种约化仅对 $n=m-1, 2m-2$ 和 $m(m-1)$ 三种情况才有可能.当 $n=m-1, 2m-2$ 时,将(39)式代入(34)式即得 $w(t)$ 应满足的常微分方程为

$$w_t + w^m = 0. \quad (40)$$

(40)式的一般解为

$$w = \left[\frac{1}{(m-1)(t+t_0)} \right]^{1/(m-1)}. \quad (41)$$

最后得到 $K(m, n)$ 的相应一般解为

$$u = \left[\frac{(x+x_0)}{m(t+t_0)} \right]^{1/(m-1)}. \quad (42)$$

对于 $n=m(m-1)$ 情况,将(39)式代入(34)式可知 $w(t)$ 应满足的常微分方程为

$$w_t + w^m + \frac{(m-2)(m-1)}{m} w^{m(m-1)} = 0, \quad (43)$$

其一般解可用下述一般的积分表达式表示:

$$\int^w \frac{dw}{-w^m - \frac{(m-2)(m-1)}{m} w^{m(m-1)}} = t - t_0. \quad (44)$$

3 $K(m, n)$ 方程对称性约化的特例

1) 对 $K(3, 2)$ 方程, $z_x \neq 0$ 情况约化后的常微分方程为(取 $a=0$ 的特殊情况)

$$bw' + w^2w' + 3w'w'' + ww''' = 0, \quad (45)$$

其孤立波解为

$$w = -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{20}{3}b} \left[3 \tanh^2 \left[\frac{\sqrt{-\frac{500}{3}b}}{10} z \right] - 2 \right]. \quad (46)$$

对 $z_x=0$ 约化后的常微分方程为

$$w_t + w^3 = 0, \quad (47)$$

其解为

$$w = \frac{1}{\sqrt{2(t+t_0)}}. \quad (48)$$

2) 对 $K(m, 1)$ 方程, $z_x \neq 0$ 情况约化后的常微分方程为(取 $a=0$ 的特殊情况)

$$bw' + w^{m-1}w' + w''' = 0, \quad (49)$$

相应于 $K(m, n)$ 方程的孤立波解为

$$u = \left\{ \frac{2k^2(m+1)}{m-1} \operatorname{sech}^2(k(x-x_0)) + \frac{4k^3}{(m-1)^2} t \right\}^{1/(m-1)}. \quad (50)$$

3) 对于 $m=n$ 的情况,相应的 Compacton 解为

$$u = \begin{cases} \left\{ \frac{4m^2\omega}{m^2-1} \cos^2 \left(\frac{m-1}{2m} (x-x_0) + \omega t \right) \right\}^{1/(m-1)} \\ \left| \frac{m-1}{2m} (x-x_0) + \omega t \right| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \quad \left| \frac{m-1}{2m} (x-x_0) + \omega t \right| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (51)$$

4 结论和讨论

本文利用 Clarkson 和 Kruskal 的直接方法给出了具有非线性色散的一般 $K(m, n)$ 方程的所有可能的常微分方程约化.对于 $z_x \neq 0$ 的一般约化(32)式仅当 $m=n+1$ 和 $m=n+2$ 时是 Painlevé 可积的.而对于(32)式中的一个特殊情况 $a=0$ 时,其一般解可用一个积分形式表示.第二种对称约化是相对于 Painlevé 分析中的奇性流形是特征流形的情况,即 $z_x=0$.对于这种特殊的约化,仅当 n 与 m 之间满足三种特殊关系, $n=m-1, n=2m-2$ 和 $n=m(m-1)$ 时才有意义.对于前二种情况约化有完全相同的解.而对于后一种情况一般解可用一个积分表达式表示.对于 $K(3, 2), K(m, 1)$ 和 $K(m, m)$ 的情况下,一般的孤子解和 Compacton 解可明显给出,而对于其他的 (m, n) 一般的孤波解或 Compacton 解尚未给出,有待于进一步研究.

感谢楼森岳教授的有益讨论.

[3] S. Y. Lou *J. Math. Phys.*, *A :Math. Gen.* **23**(1990) ,1649.

[4] R. Philip ,M. H. James *Phys. Rev. Lett.* **5**(1993) 564.

[1] P. A. Clarkson ,M. D. Kruskal ,*J. Math. Phys.* ,**30**(1989) , 2201.

[5] 楼森岳 *科学通报* ,**13**(1991) ,981 [S. Y. Lou ,*Chinese Science Bulletin* ,**13**(1991) ,981(in Chinese)].

[2] S. Y. Lou ,*Phys. Lett.* , **A151**(1990) ,133.

[6] S. Y. Lou ,Q. X. Wu ,*Phys. Lett.* ,待发表.

SYMMETRY REDUCTIONS OF THE $K(m, n)$ EQUATION*

WANG LIE-YAN
(Physics Department of Ningbo University , Ningbo 315211)
(Received 17 May 1999)

ABSTRACT

By using a direct method of symmetry reductions , all the symmetry reductions of the $K(m, n)$ equation with non-linear dispersion are given. From the Painlevé analysis of the first type of the reduction equation , we know that $K(m, n)$ model is Painlevé intgrable only if $m = n + 1$ and $m = n + 2$. In a special case(the travelling wave reduction) , the gener- al reduction solution can be expressed by an integration. The general solitary wave solutions of the $K(m, 1)$ and $K(m, m)$ models are also given in this paper.

PACC : 0340K ; 0365Ge

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. 196003).