第 49 卷 第 11 期 2000 年 11 月
1000-3290/2000/49(11)/2113-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 11, November, 2000

具有阻尼项的非线性波动方程的相似约化*

闫振亚 张鸿庆
(大连理工大学应用数学系,大连 116024)
(2000 年 3 月 13 日收到;2000 年 6 月 4 日收到修改稿)

利用 Clarkson 和 Kruskal 引入的直接约化法,给出了具有阻尼项的非线性波动方程 $u_{tt}-2bu_{xxt}+\alpha u_{xxxx}=\beta(u_x^n)_x$ ($\alpha>0,\beta\neq0,n\geqslant2$)三种类型的相似约化. 从这些约化方程的 Painlevé 分析表明该方程在 Ablowitz 的猜测意义下是不可积的. 此外还获得了该方程($n=2$)的 4 种精确类孤波解.

关键词:波动方程,相似约化,Painlevé 分析,精确解
PACC:0340K,0220,0365G

1 引 言

为了研究波运动的规律,人们往往借助于非线性波动方程的精确解. 然而求解非线性波动方程较困难. 这需要首先对方程进行约化. 目前存在三种有效的偏微分方程相似约化的方法:(1)古典法——无穷小变换的 Lie 群法[1—3];(2)非古典法——条件对称法[4,5];(3)直接法[6,7]. 直接法没有引入群论的概念,并且用直接法可以产生前两种方法所不能得到的新的约化. 这种方法已被应用于很多方程,如 Boussinesq 方程、KP 方程、KdV 方程、mKdV 方程、WBK 方程、ZK 方程及变更 Boussinesq 方程等[6,7].

在对弹塑性微观结构模型进行弱非线性分析时,文献[8]研究了一维弹性杆的纵振动问题和二维反平面剪切问题,推导出动动的位移函数 $u(x,t)$ 满足如下形式的非线性波动方程:

$$u_{tt}+\alpha u_{xxxx}=\beta(u_x^2)_x, \tag{1}$$

其中 $\alpha>0,\beta\neq0$ 为任意实数. 在实际过程中,粘性对由非线性项引起的能量积聚通常起着重要的耗散作用. 因此,最近文献[9]研究了具有粘性阻尼项的非线性波动方程,即

$$u_{tt}-2bu_{xxt}+\alpha u_{xxxx}=\beta(u_x^n)_x,\ n\geqslant2 \tag{2}$$

的初值问题 $u(x,0)=\phi(x)$,$u_t(x,0)=\psi(x)$,$x\in R$. 本文将利用直接法给出方程(2)($n\geqslant2$)的相似约化,并根据这些约化,可以证明具有阻尼项的非线性波动方程是不可积的.

2 方程(2)($n=2$)的相似约化

众所周知,方程(2)($n=2$)的所有解可表示为 $u(x,t)=U(x,t,Q(Z(x,t)))$. 事实上,没有必要设这种一般形式,可以证明,只须令 u 为如下形式:

$$u(x,t)=A(x,t)+B(x,t)Q(Z(x,t)),\quad Z=Z(x,t), \tag{3}$$

其中 $A(x,t)$,$B(x,t)$,$Z(x,t)$为待定函数,$Q(Z)$为满足某一常微分方程. 将(3)式代入(2)式,在 $n=2$ 时,得

$$\begin{aligned}
&\alpha BZ_x^4Q'''' + (4\alpha B_xZ_x^3+6\alpha BZ_x^2Z_{xx}-2bBZ_x^2Z_t)Q'''\\
&+[\alpha(6B_{xx}Z_x^2+12B_xZ_xZ_{xx}+3BZ_{xx}^2+4BZ_xZ_{xxx})\\
&-2b(2B_xZ_xZ_t+BZ_{xx}Z_t+B_tZ_x^2+2BZ_xZ_{xt})-2\beta A_xBZ_x^2\\
&+BZ_t^2]Q''+[\alpha(4B_{xxx}Z_x+6B_{xx}Z_{xx}+BZ_{xxxx}\\
&+4B_xZ_{xxx})-2b(B_{xx}Z_t+2B_{xt}Z_x+2B_xZ_{xt}+B_tZ_{xx}\\
&+BZ_{xxt})-2\beta(2A_xB_xZ_x+A_xBZ_{xx}+A_{xx}BZ_x)\\
&+BZ_{tt}+2B_tZ_t]Q'+[\alpha B_{xxxx}-2bB_{xxt}-2\beta(A_xB_{xx}\\
&+A_{xx}B_x)+B_{tt}]Q-2\beta B_xB_{xx}Q^2-2\beta(2B_x^2Z_x\\
&+BB_xZ_{xx}+BB_{xx}Z_x)QQ'-2\beta(2BB_xZ_x^2\\
&+B^2Z_xZ_{xx})Q'^2-2\beta BB_xZ_x^2QQ''-2\beta B^2Z_x^3Q'Q''
\end{aligned}$$

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998030600)及高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:98014119)资助的课题.

$$+ A_{tt} + \alpha A_{xxxx} - 2bA_{xxt} - 2\beta A_x A_{xx} = 0, \quad (4)$$

其中上撇表示 d/dZ. 为了使方程(4)化为常微分方程,则 Q 及其导数的各种组合项的系数之比仅为 Z 的函数,因此当 $Z_x \neq 0$ 时,得(以 Q'''' 项的系数 αBZ_x^4 作为标准)

$$4\alpha B_x Z_x^3 + 6\alpha BZ_x^2 Z_{xx} - 2bBZ_x^2 Z_t = \alpha BZ_x^4 P_1(Z), \quad (5)$$

$$\alpha(6B_{xx}Z_x^2 + 12B_x Z_x Z_{xx} + 3BZ_{xx}^2 + 4BZ_x Z_{xx}) - 2b(2B_x Z_x Z_t + BZ_{xx}Z_t + B_t Z_x^2 + 2BZ_x Z_{xt}) - 2\beta A_x BZ_x^2 + BZ_t^2 = \alpha BZ_x^4 P_2(Z), \quad (6)$$

$$\alpha(4B_{xxx}Z_x + 6B_{xx}Z_{xx} + BZ_{xxxx} + 4B_x Z_{xxx}) - 2b(B_{xx}Z_t + 2B_{xt}Z_x + 2B_x Z_{xt} + B_t Z_{xx} + BZ_{xxt}) - 2\beta(2A_x B_x Z_x + A_x BZ_{xx} + A_{xx}BZ_x) + BZ_{tt} + 2B_t Z_t = \alpha BZ_x^4 P_3(Z), \quad (7)$$

$$\alpha B_{xxxx} - 2bB_{xxt} - 2\beta(A_x B_{xx} + A_{xx}B_x) + B_{tt}\alpha BZ_x^4 P_4(Z), \quad (8)$$

$$-2\beta B_x B_{xx} = \alpha BZ_x^4 P_5(Z), \quad (9)$$

$$-2\beta(2B_x^2 Z_x + BB_x Z_{xx} + BB_{xx}Z_x) = \alpha BZ_x^4 P_6(Z), \quad (10)$$

$$-2\beta(2BB_x Z_x^2 + B^2 Z_x Z_{xx}) = \alpha BZ_x^4 P_7(Z), \quad (11)$$

$$-2\beta BB_x Z_x^2 = \alpha BZ_x^4 P_8(Z), \quad (12)$$

$$-2\beta B^2 Z_x^3 = \alpha BZ_x^4 P_9(Z), \quad (13)$$

$$A_{tt} + \alpha A_{xxxx} - 2bA_{xxt} - 2\beta A_x A_{xx} = \alpha BZ_x^4 P_{10}(Z), \quad (14)$$

其中 $P_i(Z)(i=1,2,\cdots,10)$ 为待定函数. 为了从方程组(5)—(14)中求出 $A, B, Z, P_i(i=1,2,\cdots,10)$,需要引入如下规则[6]:

规则(a) 若 $A(x,t)=A_0(x,t)+B(x,t)\cdot W(Z)$,则取 $W(Z)=0$(可作变换 $Q(Z)\to Q(Z)-W(Z)$).

规则(b) 若 $B(x,t)=B_0(x,t)W(Z)$,则取 $W(Z)=1$(可作变换 $Q(Z)\to Q(Z)W_0/Q$).

规则(c) 若 $Z(x,t)$ 由 $Z_0(x,t)=W(Z)$ 确定,且 $W(Z)$ 为可逆函数,则取 $W(Z)=Z$(可作变换 $Z\to W^{-1}(Z)$).

根据规则(a)—(c),可推得

$$P_1(Z) = -\frac{2b}{\alpha}(MZ+N),$$

$$P_2(Z) = \frac{1}{\alpha}[(MZ+N)^2 - 6bM],$$

$$P_3(Z) = \frac{5M}{\alpha}(MZ+N), \quad P_4(Z) = \frac{3M^2}{\alpha}$$

$$P_9(Z) = -\frac{2\beta}{\alpha}, \quad P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = P_{10} = 0. \quad (15)$$

$$u = \theta(t)Q(Z),$$
$$Z(x,t) = \theta(t)x + \phi(t), \quad (16)$$

$$\theta_t = M\theta^3, \quad \phi_{tt} - M\theta^2\phi_t - 2M\theta^4(M\phi + N) = 0, \quad (17)$$

且 $Q(Z)$ 满足如下的变系数非线性常系数微分方程:

$$\alpha Q'''' - 2b(MZ+N)Q''' + [(MZ+N)^2 - 6bM]Q'' + 5M(MZ+N)Q' + 3M^2 Q - 2\beta Q'Q'' = 0, \quad (18)$$

其中 M, N 为任意常数. 下面分两种情况进行讨论:

情况 1 当 $M=0$ 时,方程(17)的一般解为

$$\theta(t) = \theta_0 = \text{const.}, \quad \phi(t) = N\theta_0^2 t + \phi_0. \quad (19)$$

因此由方程(16),(18),(19),得方程(2)($n=2$)的一种相似约化

$$u(x,t) = \theta_0 Q(Z), \quad Z(x,t) = \theta_0 x + N\theta^2 t + \phi_0, \quad (20)$$

$$\alpha Q''' - 2bNQ'' + N^2 Q' - \beta Q'^2 + c_1 = 0, \quad (21)$$

其中 θ_0, ϕ_0, c_1 为积分常数.

情况 2 当 $M\neq 0$ 时,方程(17)的一般解为

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{-2M(t+t_0)}}, \quad \phi(t) = \frac{c_2}{M\sqrt{t+t_0}} - \frac{N}{M}. \quad (22)$$

因此由方程(16),(18),(22),得方程(2)($n=2$)的另一种相似约化

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{-2M(t+t_0)}}Q(Z),$$

$$Z(x,t) = \frac{x}{\sqrt{-2M(t+t_0)}} + \frac{c_2}{M\sqrt{t+t_0}} - \frac{N}{M}, \quad (23)$$

$$\alpha Q''' - 2bMZQ'' - 2bNQ'' - \beta Q'^2 + M^2 Z^2 Q' + 2MNZQ' + N^2 Q' - 4bMQ' + 3M^2 ZQ + 3MNQ + c_3 = 0, \quad (24)$$

其中 $M<0, c_2, c_3$ 为积分常数.

对 $Z_x=0$,即 $Z=Z(t)$,由规则(c),设 $Z(t)=t$,则方程(4)约化为

$$BQ'' + (-2bB_{xx} + 2B_t)Q' + [\alpha B_{xxxx} - 2bB_{xxt} - 2\beta(A_x B_{xx} + A_{xx}B_x) + B_{tt}]Q - 2\beta B_x B_{xx}Q^2 + A_{tt} + \alpha A_{xxxx} - 2bA_{xxt} - 2\beta A_x A_{xx} = 0. \quad (25)$$

以 Q''项的系数 B 作为平衡项,得

$$
\begin{aligned}
&-2bB_{xx}+2B_t=B\Gamma_1(t),\\
&\alpha B_{xxxx}-2bB_{xxt}-2\beta(A_xB_{xx}+A_{xx}B_x)\\
&+B_{tt}=B\Gamma_2(t),\\
&-2\beta B_xB_{xx}=B\Gamma_3(t),\\
&A_{tt}+\alpha A_{xxxx}-2bA_{xxt}-2\beta A_xA_{xx}=B\Gamma_4(t).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

根据规则(a)—(c),从方程组(26)可解得方程(2)如下相似解:

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&A_3(t)x^3+A_2(t)x^2+A_1(t)x\\
&+A_0(t)+e^{\frac{1}{2}(t+t_0)}Q(t),
\end{aligned}
$$

其中 $A_3(t)$,$A_2(t)$,$A_1(t)$,$A_0(t)$满足

$$
\begin{aligned}
&A_3''(t)-36\beta A_3^2(t)=0,\\
&A_2''(t)-36\beta A_2(t)A_3(t)=0,\\
&A_1''(t)-4\beta[2A_2^2(t)+3A_1(t)A_3(t)]\\
&-12bA_3'(t)=0,\\
&A_0''(t)-4\beta A_1(t)A_2(t)-4bA_2'(t)\\
&-e^{\frac{1}{2}(t+t_0)}\Gamma_4(t)=0,\\
&Q''+Q'+\frac{1}{4}Q+\Gamma_4(t)=0,
\end{aligned}
$$

其中 $\Gamma_4(t)$为 t 的任意函数.

3　方程(2)($n>2$)的相似约化

类似于第二部分对方程(2)($n=2$)的约化方法.设当 $n>2$ 时,方程(2)具有相似解(3),将(3)式代入(2)式,根据规则(a)—(c),可推得如下类型的相似约化:

情况 1

$$
u(x,t)=\theta_0^{\frac{3-n}{n-1}}Q(Z),Z(x,t)=\theta_0x+N\theta^2t+c_4,\tag{27}
$$

$$
\alpha Q'''-2bNQ''+N^2Q'-\beta Q'^n+c_5=0,\tag{28}
$$

其中 θ_0,c_4,c_5 为积分常数,N 为任意常数.

情况 2

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\left[-\frac{1}{\sqrt{-2M(t+t_0)}}\right]^{\frac{3-n}{n-1}}Q(Z),\\
&Z(x,t)=\frac{x}{\sqrt{-2M(t+t_0)}}+\frac{c_6}{M\sqrt{t+t_0}}-\frac{N}{M},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha Q''''-2b(MZ+N)Q'''+[(MZ+N)^2\\
&-2(n+1)bM]Q''+\frac{n+3}{n-1}M(MZ+N)Q'\\
&+\frac{(n+1)(3-n)}{(n-1)^2}M^2Q-2\beta Q'^{n-1}Q''=0,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

其中 $M\neq0$,N,c_6 为任意常数.

4　方程(2)($n\geqslant2$)的可积性和精确解

从方程(2)所推得的相似约化可知,方程(21),(24),(28),(30)都不是 Painlevé 型的方程.根据文献[6,7]中可积条件:若从某个微分方程的相似约化中所得到的每一个常微分方程都是 Painlevé 型的方程,则该方程是可积的.因此具有阻尼项的非线性波动方程(2)是不可积的.这里仅以方程(21)为例为证明方程(2)的不可积性.只须证明方程(21)不是 Painlevé 型的方程.根据 Ablowitz,Ramani 和 Segur 提出的一种分析非线性 ODE 是否为 P 型的方法(简称 ARS 方法[10]).首先确定 $Q(Z)$在 Z_0 领域中的主要性态(其中 $Z=Z_0$ 为方程(21)解 $Q(Z)$流动极点),设

$$
Q(z)\to\frac{a}{(Z-Z_0)^r}\quad(Z\to Z_0),
$$

其中 a,r 为待定常数,则方程(21)的两个主项 Q''',Q'^2 为

$$
\begin{aligned}
&Q'''\to a(-r)(-r-1)(-r-2)(Z-Z_0)^{-r-3},\\
&Q'^2\to a^2r^2(Z-Z_0)^{-2(r+1)}(Z\to Z_0),
\end{aligned}
$$

通过平衡这两项,得 $r=1$,$a=\dfrac{6\alpha}{\beta}$.然后确定共鸣项,令 $y=Z-Z_0$,将

$$
Q(Z)\to\frac{6\alpha}{\beta}y^{-1}+By^{-1+k}
$$

(其中 B,k 为常数)代入方程(21)的主要性态,平衡次主项(即含 B 的项),得

$$
\begin{aligned}
&B\alpha[(k-1)(k-2)(k-3)\\
&+12(k-1)]y^{k-4}\to0\quad(y\to0).
\end{aligned}
$$

由此式可解得

$$
k_1=1,\ k_2=\frac{5+i\sqrt{47}}{2},
$$

$$
k_3=\frac{5-i\sqrt{47}}{2},\quad i=\sqrt{-1}.
$$

由于 k_2,k_3 不是整数,则意味会出现代数支点(复数域),因此方程(21)不是 P 型(Painlevé 型).

下面寻代方程(2)($n=2$)的一些精确解:

对于方程(2)($n=2$)的第一类约化方程(21),设其有如下形式的解:

$$Q'(Z)=B_0+B_1w(Z)+B_2w^2(Z),$$

$$w'(Z)=R(1+\mu w^2),\ R\neq 0,\ \mu=\pm 1,\tag{31}$$

其中 B_0,B_1,B_2,R 为待定常数.将(31)式代入(21)式,根据 $1,w,w^2,w^3,w^4$ 线性无关,得

$$\begin{aligned}
&-\frac{3\alpha}{\beta}B_2R^2+\frac{1}{2}B_2^2=0,\\
&-\frac{\alpha}{\beta}B_1R^2+\frac{2bN\mu}{\beta}B_2R+B_1B_2=0,\\
&-\frac{4\alpha\mu}{\beta}B_2R^2+\frac{bN\mu}{\beta}B_1R+\frac{1}{2}B_1^2\\
&+B_0B_2-\frac{N^2}{2\beta}B_2=0,\\
&-\frac{\alpha\mu}{\beta}B_1R^2+\frac{2bN}{\beta}B_2R+B_0B_1-\frac{N^2}{2\beta}B_1=0,\\
&-\frac{\alpha}{\beta}B_2R^2+\frac{bN}{\beta}B_1R+\frac{1}{2}B_0^2-\frac{N^2}{2\beta}B_0-\frac{c_1}{2\beta}=0.
\end{aligned}\tag{32}$$

又因为方程 $w'(Z)=R(1+\mu w^2)$,$\mu=\pm 1$ 有通解

$$w(z)=\tanh(RZ),\ w(z)=\coth(RZ),\ \mu=-1,\tag{33}$$

$$w(z)=\tan(RZ),\ w(z)=-\cot(RZ),\ \mu=1.\tag{34}$$

解方程组(32),并由方程(20),(29)及上述结论,可得方程(2)($n=2$)的如下形式的精确解,其中包括精确类钟状孤波解、奇异孤波解和周期波解:

$$\begin{aligned}
u_1(x,t)=&-\frac{6bN\theta_0}{5\beta}\tanh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\\
&+\frac{12bN\theta_0}{5\beta}\ln\left\{2\cosh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\right\}\\
&+\frac{N^2\theta_0}{2\alpha\beta}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)+c_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t)=&-\frac{6bN\theta_0}{5\beta}\tanh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\\
&-\frac{12bN\theta_0}{5\beta}\ln\left\{2\cosh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\right\}\\
&+\frac{N^2\theta_0}{2\alpha\beta}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)+c_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,t)=&-\frac{6bN\theta_0}{5\beta}\coth\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\\
&+\frac{12bN\theta_0}{5\beta}\ln\left\{2\sinh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\right\}\\
&+\frac{N^2\theta_0}{2\alpha\beta}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)+c_9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x,t)=&-\frac{6bN\theta_0}{5\beta}\coth\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\\
&-\frac{12bN\theta_0}{5\beta}\ln\left\{-2\sinh\left[\frac{bN}{5\alpha}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)\right]\right\}\\
&+\frac{N^2\theta_0}{2\alpha\beta}(\theta_0x+N\theta_0^2t+\phi_0)+c_{10},
\end{aligned}$$

其中 c_7,c_8,c_9,c_{10} 为积分常数.注意:在求解方程组(32)时,要选取适当的积分常数 c_1.当 $\mu=1$ 时,即 $w(z)$ 为(34)式,由于从方程组(32)解得 R,B_1 为复数,因此可得到复空间中的若干周期波解.在此略去此结论.

5 结 论

本文将有效的直接约化法成功地应用于具有阻尼项的非线性波动方程(2)中,获得了若干类型的相似约化和精确解.并根据方程可积性的 Painlevé 判断,证明了方程(2)是不可积的.此外,根据所得到的约化常微分方程,借助于 Riccati 方程,获得了方程(2)($n=2$)的实数域中的 4 种不同类型显式精确类孤波解和奇异类孤波解.对于方程(2)($n>2$)的精确解及其他性质,须进一步考虑.

[1] S. Lie, *Arch. Math.*, **6**(1881), 328.

[2] P. J. Ovler, Applications of Lie Group to Differential Eqautions (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

[3] G. W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

[4] G. W. Bluman, J. D. Cole, *J. Math. Mech.*, **10**(1969), 1025.

[5] D. Levi, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**(1989), 2915.

[6] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **30**(1989), 2201.

[7] S. Y. Lou, *Phys. Lett.*, **A176**(1993), 96; **A151**(1990), 133; *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**(1990), L649; *J. Math. Phys.*, **33**(1992), 4300.

[8] A. Lianjun, P. Anthong, *J. Appl. Math.*, **559**(1995), 136.

[9] Z. J. Yang, G. W. Chen, *Acta Math. Appl. Sin.*, **23**(2000), 45(in Chinese)[杨志坚、陈国旺,应用数学学报,**23**(2000),45].

[10] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 715.

SIMILARITY REDUCTIONS FOR A NONLINEAR WAVE EQUATION WITH DAMPING TERM*

YAN ZHEN-YA　ZHANG HONG-QING

(*Department of Applied Mathematics*, *Dalian University of Technology*, *Dalian*　116024, *China*)

(Received 13 March 2000; revised manuscript received 4 June 2000)

ABSTRACT

Three types of similarity reductions are obtained for nonlinear wave equation with damping term $u_{tt} - 2bu_{xxt} + \alpha u_{xxxx} = \beta(u_x^n)_x$ ($\alpha > 0$, $\beta \neq 0$, $n \geqslant 2$) by the use of the direct reduction method due to Clarkson and Kruskal. It is shown that this equation is not integrable under the sense of Ablowitz's conjecture by analysing the Painlevé properties of these reduction equations. In addition, four families of exact solutions are found for this equation ($n = 2$).

Keywords: wave equation, similarity reduction, Painlevé analysis, exact solution

PACC: 0340K, 0220, 0365G

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China (Grant No. G1998030600) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 98014119).