

用负反馈控制混沌 Lorenz 系统到达任意目标 *

唐国宁 罗晓曙 孔令江

(广西师范大学物理与电子科学系 桂林 541004)

(1999 年 4 月 6 日收到)

研究了用非线性反馈控制混沌 Lorenz 系统的方法, 经理论分析, 给出了反馈控制函数的表达式和混沌控制的期望结果, 理论结果和数值结果一致表明, 不同的控制函数可使系统稳定在不同的目标点或不同的周期轨道上.

PACC : 0545 ; 4265

1 引 言

非线性系统广泛存在于气象、物理、化学、生物等各个领域, 在一定条件下, 非线性系统将导致混沌, 由于在现实生活中, 混沌运动往往是有害的, 所以混沌研究一兴起, 人们就在探索如何避免或控制混沌运动问题.

自从 1963 年以来, 许多学者都研究了 Lorenz 方程, Lorenz 等十余位作者先后在天气、对流、斜波等现象及水轮机、发电机、激光器等真实物理系统中发现, Lorenz 方程可以作为许多现实混沌运动的精确模型^[1], 目前已经提出了许多不同的混沌控制方法实现了对混沌 Lorenz 系统的控制^[1-5], 但是大多数工作是数值实验, 没有从理论上给出经控制后系统的演化结果, 也不能将系统稳定在任意的周期轨道上, 特别是稳定在高周期轨道上. 本文经理论分析后给出了控制函数的表达式以及经控制后系统演化的最终结果, 此结果与数值结果一致.

2 非线性反馈控制下的 Lorenz 系统

1963 年 Lorenz^[6] 提出了著名的 Lorenz 方程

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz. \quad (3)$$

数值研究结果表明, 当 $a = 10$, $c = 8/3$, $\infty > b \geq 28$ 时, 除在一些 b 值 ($b = 100, 160, 260$ 等) 的附近外, Lorenz 系统处于混沌状态^[7], 类似文献 [1] 的做法, 在 (1)(2) 式右边各加一个控制输入 u_1, u_2 , 于是得到一个受控的 Lorenz 系统:

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x) + u_1, \quad (4a)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz + u_2, \quad (4b)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz. \quad (4c)$$

根据混沌轨道的遍历性, Lorenz 系统在某时刻会到达 $x = e$ 的点上, 但不能稳定在该点上, 为了稳定在该点上, 所取的控制输入必须满足稳定性条件: $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, 此时可取控制输入

$$u_1 = ad, u_2 = 0,$$

将 u_1, u_2 代入 (4) 式得

$$a(y - e) + ad = 0, \quad (5a)$$

$$be - y - ez = 0, \quad (5b)$$

$$ey - zc = 0. \quad (5c)$$

解方程得 $d = e - ecb/(e^2 + c)$, $y = ecb/(e^2 + c)$, $z = be^2/(e^2 + c)$, 为了使系统快速稳定在 $x = e$, $y = ecb/(e^2 + c)$, $z = be^2/(e^2 + c)$ 的 p 点上, 在 $x \neq e$ 时刻, 取控制输入为

$$u_1 = -|ad|(x - e - \text{sign}(ad)), \quad (6a)$$

$$u_2 = 0. \quad (6b)$$

此时若将 (4) 式在 p 点线性化, 并求线性化方程的特征方程的根, 可得到三个根, 根的实部均为绝对值较大的负数, 说明在负反馈作用下 p 点为稳定不动点, 所以在负反馈作用下 Lorenz 系统会很快达到目标 p 点. 显然取 (6) 式的控制输入存在下列不足: (1) 不能控制到 Lorenz 系统的三个平衡点上, 要做到这一点, 需要将 (6) 式中的负反馈比例系数改为另一常数, 并去掉 $\text{sign}(ad)$ 项. (2) 不能控制到 Lorenz 系统混沌区内的任意一点或周期轨道上.

为了控制系统达到 $x = e_1, y = e_2$ 这一点上, 可取控制输入为

$$u_1 = -|ad_1|(x - e_1 - \text{sign}(ad_1)), \quad (7)$$

* 广西教育厅科学基金(批准号 9816940)资助的课题.

$$u_2 = -|d_2|(y - e_2 - \text{sign}(d_2)). \quad (8)$$

将 $x = e_1, y = e_2$ 代入(4)式, 并使用稳定性条件得 $d_1 = e_1 - e_2, d_2 = e_1^2 e_2 / c - e_1 b + e_2, z = e_1 e_2 / c$; 由(6)式的控制输入结果可知在负反馈作用下, 系统将很快到达目标点 $(e_1, e_2, e_1 e_2 / c)$.

为了将 Lorenz 系统控制到任意周期轨道上, 可通过把(7)(8)式中的 e_1, e_2 改为周期函数并适当选取 d_1, d_2 来实现, 具体做法是: 设计一个外部振荡器, 使其能产生正弦周期信号, 将这个周期信号与系统输出信号之差乘以适当的权重因子作为控制输入, 类似前面的讨论得, 如选取控制输入为

$$u_1 = -|d_1|(x - r \sin(\omega t) - \text{sign}(d_1)), \quad (9)$$

$$u_2 = -|d_2|(y - r \cos(\omega t) - \text{sign}(d_2)). \quad (10)$$

其中

$$d_1 = 1.4142136 \arcsin(\omega t - 45^\circ),$$

$$d_2 = (r^3 \sin(\omega t) \sin(2\omega t)) / (2c) - br \sin(\omega t) + r \cos(\omega t).$$

系统将稳定在周期轨道上, 此周期轨道为

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\omega t), \\ y &= r \cos(\omega t), \\ z &= (r^2 \sin(2\omega t)) / (2c). \end{aligned}$$

3 数值研究结果

本文采用四阶龙格-库塔算法对方程组(4)进行了数值研究, 在数值计算中, 固定取 $a = 10, c = 8/3$, 初值为 $x(0) = 2.5, y(0) = -1.8, z(0) = 0.5, b$ 的取值范围为 $28 \leq b \leq 200, e, e_1, e_2$ 的取值范围从 -50 到 50. 采用(6)式的控制输入, 取不同的 b, e 值进行了计算, 得到的部分结果如图 1, 2 所示, 数值结果表明, 不管 b, e 取多大, 系统都能在 2 秒左右到达目标点 $(e, ecb/(e^2 + c), be^2/(e^2 + c))$. 采用(7)(8)式的控制输入, 取不同的 b, e_1, e_2 值进行计算, 得到的部分结果如图 3, 4 所示, 数值结果表明对于不同的 b, e_1, e_2 值, 系统都能在 3 秒内达到目标点 $(e_1, e_2, e_1 e_2 / c)$. 这些结果与理论结果一致.

采用(9)(10)式的控制输入, r 的取值范围为 $0.01 \leq r \leq 70, \omega$ 的取值范围为 $0.01 \leq \omega \leq 100$, 取不同的 b, r, ω 值进行计算, 得到部分结果如图 5, 6, 7 所示, 数值结果表明: 1) 当 $0.4 < r < 1$ 时, 系统还能稳定在周期轨道上, 但轨道形状和周期与理论结果大不一样, r 接近 0 时, 系统都不能稳定在周期轨道上, 这是由于反馈信号较弱的缘故. 2) 对于其他不同 b, r, ω 值, 都能在 $t = 2\pi/\omega$ 秒内使系统稳定在周期轨道上, 而且周期 $T = 2\pi/\omega$, 与轨道形状无关. 3) 在 r 不太小的情况下, ω 从 0.01 变化到 100, 在 x, y 平面内轨道形状由接近圆形过渡到接

近椭圆形. 这些结果基本与理论结果一致, 不完全一致的原因可以从图 6 看出. 由图 6 知 椭圆的半长轴所在区不在混沌 Lorenz 系统轨道遍历的主要区域, 因此在这些区域, 反馈信号较强, 如果这样强的反馈持续时间长(对应 ω 大), 类似于力学中的惯性作用, Lorenz 系统将偏离圆形轨道, 这就是为什么 ω 大时系统会稳定在椭圆轨道上的原因.

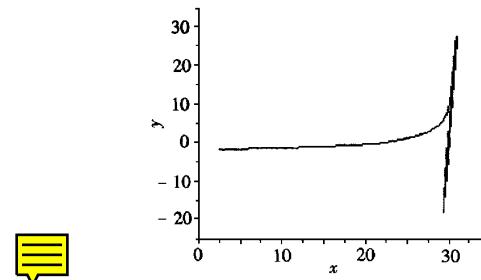


图 1 $b = 28, e = 30$ 稳定点 $(30.0, 2.4815, 27.917)$

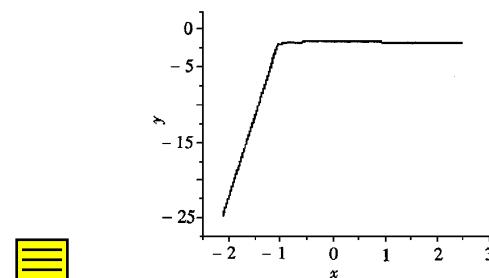


图 2 $b = 28, e = -2$ 稳定点 $(-2.0, -22.40, 16.8)$

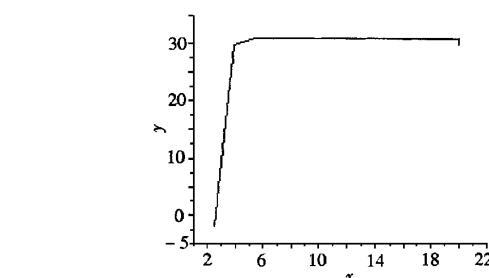


图 3 $b = 28, e_1 = 20.0, e_2 = 30.0$ 稳定点 $(20.0, 30.0, 225.0)$

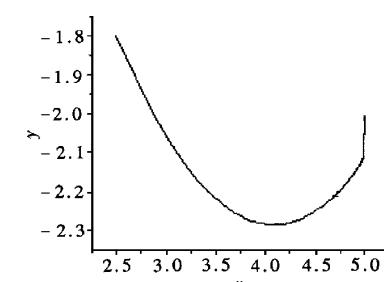
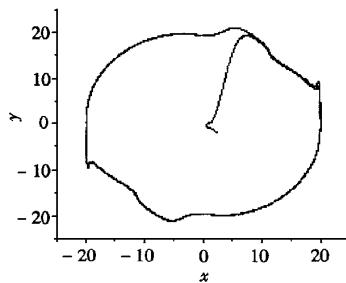
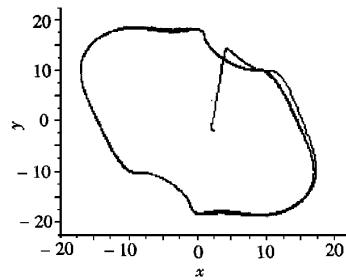
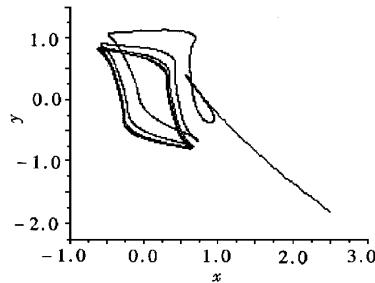


图 4 $b = 28, e_1 = 5.0, e_2 = -2.0$ 稳定点 $(5.0, -2.0, -3.75)$

图 5 $b = 28, r = 20, \omega = 10.0$ 图 6 $b = 28, r = 20.0, \omega = 100$ 图 7 $b = 28, r = 1.0, \omega = 10$

4 结 论

本文提出的非线性控制方法,可以有效的控制 Lorenz 系统,与其他控制方法比较,本方法具有下列优点:1)控制过程简单、有效。2)控制范围宽。对于不同的系统参数,既可以使系统长期稳定在不同周期轨道上,特别是高周期轨道上,也可以稳定在任意一点上。3)从起点到达目标点或周期轨道所需的时间很短。更有意义的是:选择不同的控制输入,可以知道控制结果,这一点无疑具有重要的实用价值。

- [1] 余建祖,苏楠, T. L. Vincent, 物理学报, **47**(1998), 397 [Jian-zu Yu , Nan Su , T. L. Vincent ,*Acta Physica Sinica* **47**(1998), 397(in Chinese)].
- [2] E. Ott ,C. Grebogi ,J. A. Yorke ,*Phys. Rev. Lett.* , **64**(1990), 1196.
- [3] Teh-Lu Liao ,*Phys. Rev.* , **E57**(1998), 1604.
- [4] 罗晓曙,孔令江,屈万里,物理学报, **47**(1998), 1078 [Xiao-shu Lou , Ling-jiang Kong , Wan-li Qu ,*Acta Physica Sinica* , **47**(1998), 1078(in Chinese)].
- [5] 王忠勇,蔡远利,贾冬,物理学报, **48**(1999), 206 [Zhong-yong Wang , Yuan-li Cai , Dong Jia ,*Acta Physica Sinica* , **48**(1999), 206(in Chinese)].
- [6] E. N. Lorenz *J. Atmos. Csi.* , **20**(1963), 130.
- [7] 郝柏林,物理学进展, **3**(1983), 329 [Bai-lin Hao ,*Progress in Physics* , **3**(1983), 329(in Chinese)].

CONTROL OF CHAOTIC LORENZ SYSTEM TO APPROACH ANY DESIRED TARGETS WITH FEEDBACK FUNCTIONS

TANG GUO-NING LUO XIAO-SHU KONG LING-JIANG

(Department of Physics and Electronic Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004)

(Received 6 April 1999)

ABSTRACT

This paper investigates the methods for controlling chaos in the Lorenz system with nonlinear feedback functions. Feedback functions and results of controlling chaos are presented through theoretical analysis. The results of theory and numerical calculations indicate that the trajectories of a chaotic system can be controlled to approach the target periodic orbits or points by feedback functions.

PACC :0545 ; 4265

* Project supported by the Science Foundation of Education Bureau of Guangxi Zhuang Autonomes Region (Grant No. 9816940), China.