第 49 卷 第 1 期 2000 年 1 月
1000-3290/2000/49(01)/0033-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 1, January, 2000

非自治混沌系统的脉冲同步

杨林保
(鄂州大学,湖北省鄂州市 436000)
杨 涛
(美国伯克利加州大学电气工程及计算机科学系,伯克利市 CA94720)
(1999 年 3 月 29 日收到)

研究两个非自治混沌系统之间的脉冲同步的实用稳定性,将问题转化为同步误差系统的原点的实用稳定性. 利用脉冲微分方程的相关理论,给出了同步误差系统原点实用稳定的相关判据,并给出了误差范围的理论表达式. 计算机仿真实验的结果验证了理论结果.

PACC: 0545; 4265

1 引 言

利用脉冲控制技术控制和同步混沌系统已在保密通讯[1,2],数字扩频通讯[3—5]等领域取得了广泛的应用. 在美国,基于脉冲混沌同步的通讯系统已在不久前申请专利[6]. 在美国及日本脉冲混沌同步的电路系统实验已经完成[7,8]. 实验证明,脉冲混沌同步技术有极好的抗噪性能,并且有极高的讯道效率. 现有的文献均集中于研究自治混沌系统的脉冲同步,本文将侧重研究非自治混沌系统的脉冲同步及其稳定性,这将拓宽现有文献[9—12]中的结论.

2 基本定义及理论

一个非自治混沌系统可由以下方程给出,

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \tag{1}$$

其中 $f: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$ 连续. $x \in \mathcal{R}^n$ 是状态变量. $u: \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^m$ 是外加输入. 假设

$$U(i, x) = \Delta x|_{t=\tau_i} \triangleq x(\tau_i^+) - x(\tau_i^-) \tag{2}$$

是在离散时刻 τ_i 的状态变化,并令 τ_i 满足

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_i < \tau_{i+1} < \cdots,$$
$$\tau_i \to \infty \text{ 当 } i \to \infty,$$

那么,对由(1)式给出的混沌系统的脉冲控制,则由以下方程给出:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x = U(i, x), \quad t = \tau_i, \\ &x(t_0^+) = x_0, \quad t_0 \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

以下给出文中将要用到的定义.

定义 1

令 $V: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_+$,如果以下条件满足,则 V 属于 V_0 类.

1) V 在 $(\tau_{i-1}, \tau_i] \times \mathcal{R}_+$ 中连续,并且以下极限存在:

$$\lim_{(t,y)\to(\tau_i^+, x)} V(t, y) = V(\tau_i^+, x). \tag{4}$$

2) V 对于 x 局域 Lipschitzian.

定义 2

对于任何 $(t, x) \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \times \mathcal{R}^n$,我们定义 $D^+V(t, x)$ 为

$$D^+ V(t, x) \triangleq \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x+hf(t, x, u(t))) - V(t, x)]. \tag{5}$$

定义 3 比较系统

令 $V \in V_0$ 并假设

$$\begin{aligned} &D^+ V(t, x) \leqslant g(t, V(t, x), v(t)) \quad t \neq \tau_i, \\ &V(t, x + U(i, x)) \leqslant \psi_i(V(t, x)) \quad t = \tau_i, \end{aligned} \tag{6}$$

其中函数 $g: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ 连续,并且 $\psi_i: \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$ 是非减函数. 那么以下系统

$$\begin{aligned} &\dot{w} = g(t, w, v(t)) \quad t \neq \tau_i, \\ &w(\tau_i^+) = \psi_i(w(\tau_i)) \quad i = 1, 2, \cdots \\ &w(t_0^+) = w_0 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7}$$

是(3)式的比较系统.

定义 4

如果一个函数 $\Phi: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_+$ 属于函数集 $PC(\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n, \mathcal{R}_+)$,则 Φ 满足的条件为

1)对任何 $t\in\mathscr{R}_+$,$t\neq\tau_k$,Φ 连续;对任何 $t\in\mathscr{R}_+$,Φ 左连续.

2)在点 τ_k,Φ 为第一类不连续.

令集合 Ω 为

$$\Omega=\{u\in\mathscr{R}^m\mid\Gamma(t,u)\leqslant r(t),t\geqslant t_0\},\tag{8}$$

其中 $\Gamma\in C[\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}^m,\mathscr{R}_+]$,$r(t)$是比较系统(7)式的最大解,有以下定义:

定义 5 实用稳定性

对于任意给定的(λ,A),$\lambda>0$,$A>0$,如果 $\|x_0\|<\lambda$,并且对于任意给定的 $u\in\Omega$,存在一个 $t_0\in\mathscr{R}$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时,$\|x(t)\|<A$ 满足,则系统(3)式是(λ,A)实用稳定的.

令集合 $S(\rho)$为

$$S(\rho)=\{x\in\mathscr{R}^n\mid\|x\|<\rho\},\tag{9}$$

如果函数 $\alpha\in C[\mathscr{R}_+,\mathscr{R}_+]$满足 $\alpha(0)=0$ 并且 $\alpha(x)$是严格递增的,则 $\alpha\in K$.由于研究一阶脉冲微分方程的稳定性比研究高阶脉冲微分方程的稳定性要容易,我们用以下引理将高阶问题转化为一阶问题.

引理 1 (证明见文献[13] 661 页之定理 3.1)

假设

1)$g\in PC[\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}_+,\mathscr{R}_+]$,对任何$(t,v)$,$g(t,u,v)$以 u 为变量非减;对任何(t,u),$g(t,u,v)$以 v 为变量非减.

2)ψ_i 非减.

3)给定 $0<\lambda<A$.

4)$V\in PC[\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}^n,\mathscr{R}_+]$,$V(t,x)$相对于 x 局域 Lipschitzian,并且存在 $\alpha,\beta\in k$,使得

$$\beta(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\alpha(\|x\|),\quad (t,x)\in\mathscr{R}_+\times S(\rho),\rho>A.\tag{10}$$

5)对于$(t,x)\in(\tau_i,\tau_{i+1}]\times S(\rho)$,$u(t)\in\Omega$,下式成立,

$$D^+V(t,x)\leqslant g(t,V(t,x),\Gamma(t,u)).\tag{11}$$

6)如果 $x\in S(A)$,则 $x+U(i,x)\in S(\rho)$,并且 $V(\tau_i^+,x+U(i,x))\leqslant\psi_i(V(t,x))$.

7)$\alpha(\lambda)<\beta(A)$.

那么,对于任何 $u(t)\in\Omega$,系统(3)式的(λ,A)实用稳定性等价于系统(7)式的$(\alpha(\lambda),\beta(A))$实用稳定性.

在以下定理中,我们将给出一类一阶脉冲微分方程的稳定性.这类一阶脉冲微分方程将作为本文中所用到的比较系统.

定理 1

令 $\Delta_{\max}$满足

$$\Delta_{\max}\triangleq\max_{i\to\infty}\{\tau_i-\tau_{i-1}\},\tag{12}$$

对于给定的(λ,A),$\lambda>0$,$A>0$,如果

1)

$$\begin{aligned}g(t,w,v)&=\phi w+\theta,\phi>0,\theta>0,t\neq\tau_i,\\ \psi_i(w)&=d_iw,d_i>0,t=\tau_i,i=1,2,\cdots\\ w(t_0^+)&=w_0\geqslant0.\end{aligned}\tag{13}$$

2)

$$\lambda\prod_{i=1}^{\infty}d_i\mathrm{e}^{\phi(t-t_0)}+(\theta/\phi)\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=j}^{\infty}d_i\left|\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_j)}-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_{j-1})}\right|+\left|(\theta/\phi)(1-\mathrm{e}^{\phi\Delta_{\max}})\right|<A,\tag{14}$$

则对于任何 $v(t)$,系统(13)式是(λ,A)实用稳定.

证明:

(13)式的解由下式给出:

$$\begin{aligned}w(t,t_0,w_0)&=w_0\prod_{i=1}^{k}d_i\mathrm{e}^{\phi(t-t_0)}+(\theta/\phi)\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=j}^{k}d_i(\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_j)}-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_{j-1})})\\&\quad+(\theta/\phi)(1-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_k)})\\&<w_0\prod_{i=1}^{k}d_i\mathrm{e}^{\phi(t-t_0)}+(\theta/\phi)\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=j}^{k}d_i\left|\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_j)}-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_{j-1})}\right|\\&\quad+\left|(\theta/\phi)(1-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_k)})\right|,\\&\quad t\in(\tau_k,\tau_{k+1}].\end{aligned}\tag{15}$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\left|(\theta/\phi)(1-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_k)})\right|\leqslant\left|(\theta/\phi)(1-\mathrm{e}^{\phi\Delta_{\max}})\right|,\tag{16}$$

并且 $w_0<\lambda$,我们得到当 $t\to\infty$时,$w(t,t_0,w_0)<A$.证毕.

3 混沌系统的脉冲同步

研究以下混沌系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-f(x),\\ \dot{y}&=-\epsilon x-\zeta y+\gamma\sin(\omega t),\end{aligned}\tag{17}$$

其中分段线性函数 $f(\cdot)$由下式给出:

$$f(x)=bx+\frac{1}{2}(a-b)(|x+1|-|x-1|).\tag{18}$$

这一混沌系统的参数给定为

$$\epsilon=1,\zeta=1.015,\omega=0.75,\\ \gamma=0.15,a=-1.02,b=-0.55.$$

相应的混沌吸引子如图 1 所示.

本文研究单向驱动耦合脉冲同步.在这种同步方式中,驱动混沌系统将施加同步控制脉冲给被驱动混沌系统,使得同步误差在事先设定的范围之内.驱动系统由(17)式给出,被驱动系统则由下式给出:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde{x}} = \tilde{y} - f(\tilde{x}) \quad t \neq \tau_i, \\
&\dot{\tilde{y}} = -\epsilon\tilde{x} - \zeta\tilde{y} + \gamma\sin(\omega t + \tilde{\theta}) \quad t \neq \tau_i, \\
&\tilde{x}(\tau_i^+) = \tilde{x}(\tau_i) + (1 - d_i)e_x(\tau_i) \\
&\tilde{y}(\tau_i^+) = \tilde{y}(\tau_i) + (1 - d_i)e_y(\tau_i) \\
&\qquad\qquad d_i > 0, t = \tau_i,
\end{aligned} \tag{19}
$$

其中 $\tilde{\theta}$ 是一个随机相位. 令同步误差 $e_x = x - \tilde{x}$, $e_y = y - \tilde{y}$,由(17)及(19)两式得到

$$
\begin{aligned}
&\dot{e}_x = e_y - [f(x) - f(\tilde{x})] \quad t \neq \tau_i, \\
&\dot{e}_y = -\epsilon e_x - \zeta e_y + \gamma[\sin(\omega t) - \sin(\omega t + \tilde{\theta})] \\
&\qquad t \neq \tau_i, \\
&\left.\begin{aligned} e_x(\tau_i^+) = d_i e_x(\tau_i) \\ e_y(\tau_i^+) = d_i e_y(\tau_i) \end{aligned}\right. \quad d_i > 0, t = \tau_i.
\end{aligned} \tag{20}
$$

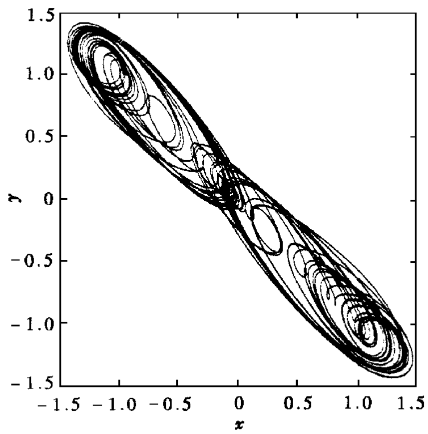

图 1 相应的混沌系统的吸引子

定理 2

系统(20)式的(λ, A)实用稳定性等价于以下比较系统的$(\sqrt{2}\lambda, A)$实用稳定性

$$
\begin{aligned}
&g(t, w, v) = \phi w + \theta, \phi = \max\{|\epsilon + |a||,\\
&|1 - \zeta|\}, \theta = 2|\gamma|, t \neq \tau_i, \\
&\quad \psi_i(w) = d_i w, d_i > 0, t = \tau_i, i = 1, 2, \cdots \\
&\quad w(t_0^+) = w_0 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

证明:

选择 Lyapunov 函数为

$$
V(t, e) = |e_x| + |e_y|, \tag{22}
$$

则由于 $a < b < 0$ 有

$$
-[f(x) - f(\tilde{x})]\operatorname{sgn}(e_x) \leqslant |a||e_x|.
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
D^+V(t, e) &= \dot{e}_x\operatorname{sgn}(e_x) + \dot{e}_y\operatorname{sgn}(e_y) \\
&= e_y\operatorname{sgn}(e_x) - [f(x) - f(\tilde{x})]\operatorname{sgn}(e_x) \\
&\quad - \epsilon e_x\operatorname{sgn}(e_y) - \zeta|e_y| + \gamma\operatorname{sgn}(e_y)[\sin(\omega t) \\
&\quad - \sin(\omega t + \tilde{\theta})] \\
&\leqslant |a||e_x| - \zeta|e_y| + (|e_y| - \epsilon|e_x|) \\
&\quad \cdot \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y) + 2|\gamma| \\
&\leqslant (\epsilon + |a|)|e_x| + (1 - \zeta)|e_y| + 2|\gamma| \\
&\leqslant \max\{|\epsilon + |a||, |1 - \zeta|\}V(t, e) + 2|\gamma|.
\end{aligned} \tag{23}
$$

因而有

$$
g(t, w, v) = \phi w + \theta, \tag{24}
$$

其中 $\phi = \max\{|\epsilon + |a||, |1 - \zeta|\}$, $\theta = 2|\gamma|$.

因为

$$
V(\tau_i^+, e(\tau_i^+)) = d_i V(\tau_i, e(\tau_i)), \tag{25}
$$

有 $\psi_i(w) = d_i$. 从所周知 $|x| + |y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$. 由

$$
\begin{aligned}
&2(x^2 + y^2) = 2(|x|^2 + |y|^2) \geqslant |x|^2 \\
&+ 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2
\end{aligned} \tag{26}
$$

得到 $|x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$. 因而我们有 $\alpha(\chi) = \sqrt{2}\chi$, $\beta(\chi) = \chi$. 易证引理 1 所有条件均成立,本定理得证.

定理 3

令 $d_i = d > 0$, $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i > 0$ 为两个常数,令以下条件成立

1)

$$
(1/\delta)\ln(d) + \phi < 0. \tag{27}
$$

2)

$$
(\theta/\phi)\frac{|1 - e^{\phi\delta}|}{1 - d e^{\phi\delta}} < A. \tag{28}
$$

对于任意给定的 $\lambda > 0$,同步误差系统的原点是(λ, A)实用稳定的.

证明:令

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \left[\frac{t - t_0}{\delta}\right]\ln(d) + \phi(t - t_0) \\
&= \left[\frac{t - t_0}{\delta}\right]\ln(d) + \phi\left\{\delta\left[\frac{t - t_0}{\delta}\right]\right\} \\
&\quad + \phi\left\{(t - t_0) - \delta\left[\frac{t - t_0}{\delta}\right]\right\} \\
&\leqslant \left[\frac{t - t_0}{\delta}\right](\ln(d) + \delta\phi) + \delta\phi.
\end{aligned} \tag{29}
$$

式中$[x]$表示小于 x 的最大整数. 由于$(1/\delta)\ln(d) + \phi < 0$,我们有

$$
\lim_{t \to \infty}\xi(t) = -\infty, \tag{30}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty}\prod_{i=1}^{k} d e^{\phi(t - t_0)} &= \lim_{t \to \infty} e^{\left[\frac{t - t_0}{\delta}\right]\ln(d) + \phi(t - t_0)} \\
&= \lim_{t \to \infty} e^{\xi(t)} = 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

由上式得知对于任何 $\lambda<\infty$，(14)式的第一项为 0. 对于 $t\in(\tau_k,\tau_{k+1})$，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}(\theta/\phi)\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=j}^{k}d\,|\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_j)}-\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_{j-1})}|\\
&=(\theta/\phi)\lim_{k\to\infty}|1-\mathrm{e}^{\phi\delta}|\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=j}^{k}d\,\mathrm{e}^{\phi(t-\tau_j)}\\
&=(\theta/\phi)\lim_{k\to\infty}|1-\mathrm{e}^{\phi\delta}|\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=j}^{k}d\,\mathrm{e}^{\phi(\tau_{k+1}-\tau_j)}\\
&\leqslant(\theta/\phi)|1-\mathrm{e}^{\phi\delta}|\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}d^{j}\mathrm{e}^{j\phi\delta}\\
&=(\theta/\phi)|1-\mathrm{e}^{\phi\delta}|d\,\mathrm{e}^{\phi\delta}\frac{1}{1-d\,\mathrm{e}^{\phi\delta}},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

最后一个等式成立的条件是$(1/\delta)\ln(d)+\phi<0$.

由于 w_0 可以为任何有限值，由定理 2 知比较系统$(\sqrt{2}\lambda,A)$实用稳定. 其中 $\lambda<\infty$为任意正数. 由定理 1 知同步误差系统(20)式对于任何 $\lambda<\infty$的正数(λ,A)实用稳定. 证毕.

4 计算机仿真实验结果

由图 1 给定的参数 $\epsilon=1$，$a=-1.02$，可得到 $\phi=\epsilon+|a|=2.02$，选择 $\delta=0.1s$. 由(27)式知 $d<\mathrm{e}^{-0.202}\approx0.817095$. 选择 $\theta=0.15$. 初始条件为$(x(0),y(0))=(2,-1)$，$(\tilde{x}(0),\tilde{y}(0))=(-2,2)$. 随机相位差选择为 $\tilde{\theta}=1.21\pi$. 实验中选择 $d=0.1$，则有 $A\approx0.037881$. 这表明在本实验中 e_x 和 e_y 的最大幅度将小于 0.037881. 仿真结果如图 2 所示. 图 2(a)显示了 e_x(虚线)和 e_y(实线)的波形，两条水平的点线显示了定理 3 给出的误差范围. 图中证实定理 3 给出的结果是相当精确的. 图 2(b)和 2(c)分别给出了 $x-\tilde{x}$ 及 $y-\tilde{y}$ 轨线. 由图中可见脉冲同步是相当稳定的.

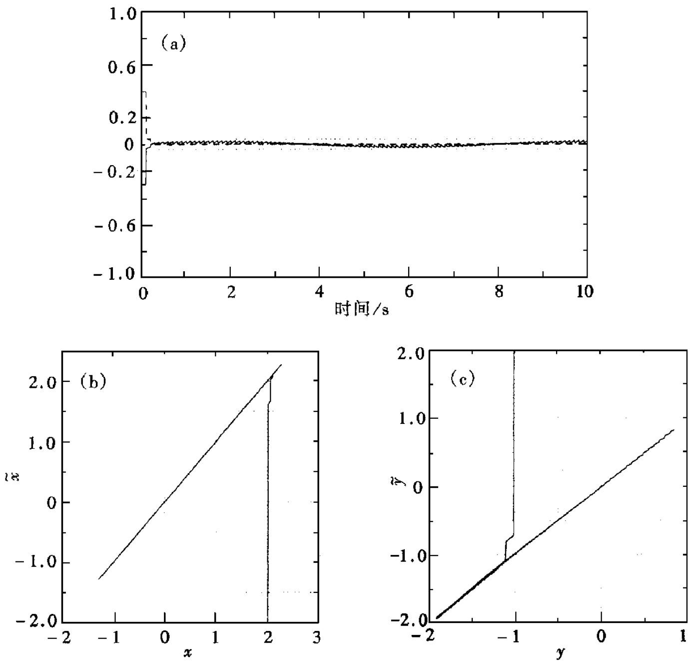

图 2 计算机仿真实验结果 (a)同步误差 $e_x(t)$及 $e_y(t)$，(b)$x-\tilde{x}$ 轨迹图，(c)$y-\tilde{y}$ 轨迹图

5 结 论

本文给出了对存在未知外加扰动(输入)的非自治混沌系统的同步的实用稳定性判据. 由于真实物理系统中未知扰动常难避免，因而本文中的理论分析将为相关应用提供坚实的基础.

[1] T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(3)(1997), 645.

[2] T. Yang, L. O. Chua, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I: fundamental theory and applications*, **44**(10)(1997), 976.

[3] T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(12)(1997), 2789.

[4] T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**(8)(1998), 1657.

[5] T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**(10)(1998), 2047.

[6] T. Yang, L. O. Chua, University of California, Berkeley, Office of Technology Licensing, Case No. B97-080, Name of Technology: Chaotic digital code-division multiplex access for wireless communication systems, June 1998.

[7] A. I. Panas, T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**(3)(1998), 639.

[8] M. Itoh, T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(7)(1999), 1361.

[9] T. Yang, L. B. Yang, C. M. Yang, *Physica D*, **110**(1997), 18.

[10] T. Yang, L. B. Yang, C. M. Yang, *Physica Letters A*, **226**(6)(1997), 349.

[11] T. Yang, C. M. Yang, L. B. Yang, *Physics Letters A*, **232**(5)(1997), 356.

[12] J. A. K. Suykens, T. Yang, L. O. Chua, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**(6)(1998), 1371.

[13] F. A. McRae, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, **181**(1994), 656.

IMPULSIVE SYNCHRONIZATION OF NONAUTONOMOUS CHAOTIC SYSTEMS

YANG LIN-BAO
(*University of Ezhou, Ezhou City, Hubei* 436000)
YANG TAO
(*Electronics Research Laboratory and Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, Berkeley, CA* 94720, *USA*)
(Received 29 March 1999)

ABSTRACT

In this paper, the practical stability of impulsive synchronization between two nonautonomous chaotic systems is studied. This practical stability is equivalent to that of the origin of the synchronization error system. We present the criteria for the practical stability of the origin of the synchronization error system based on the theory of impulsive differential equation. We also provide the theoretical results on the range of synchronization errors. Numerical experimental results are given to compare with theoretical results.

PACC: 0545; 4265