

一种最大李雅普诺夫指数估计的稳健算法

杨绍清[†]

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001)

章新华

赵长安

(海军大连舰艇学院, 大连 116018) (哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001)

(1999 年 4 月 9 日收到; 1999 年 5 月 21 日收到修改稿)

最大李雅普诺夫指数是诊断和描述动态系统混沌的重要参数. 在深入研究相空间重构技术和轨道跟踪法的基础上, 提出了一种从标量混沌时间序列中估计最大李雅普诺夫指数的新算法. 该算法能够克服现有算法的不足, 主要有以下三个优点: 1) 很高的精度; 2) 几乎不受噪声的影响; 3) 所需的计算时间和存贮空间小, 能进行在线计算.

PACC: 0545

1 引 言

近几年来, 混沌信号的诊断及其特性的描述已经广泛地应用于时间序列的分析中^[1]. 在诊断和描述混沌信号时, 最大李雅普诺夫指数(λ_1)不仅是一个很重要的不变量, 而且是判断混沌存在的一个重要依据. 因此, 利用 λ_1 去诊断和描述混沌仍然是一种主要方法. 其他有些方法(如 K -熵法等^[2])与这种方法没有本质的区别. 目前估计 λ_1 的方法主要有两种^[3]: 一种是分析法(analytic approach), 一种是轨道跟踪法(trajjectory tracing method). 前者是用一个函数(如局部多项式或神经网络等)来建立系统模型, 然后估计系统的雅可比矩阵, 进而求取 λ_1 ; 后者是直接从 λ_1 的定义出发跟踪系统的两条轨道, 获取 λ_1 . 由于轨道跟踪法不像分析法那样易受系统拓扑结构的影响, 因而受到许多学者的高度重视.

自从 1985 年 Wolf^[4]提出轨道跟踪法以来, 这种方法得到了较大的改进. 最有代表性的是 Rosenstein 等^[5]的工作, 他们给出了一种比较优化的算法: 首先绘制 $\langle \ln d_k(j) \rangle$ 相对 $j \cdot \Delta t$ 的曲线, 然后通过计算曲线中直线段的斜率来获得 λ_1 . 这里 $d_k(j)$ 是第 k 对最近邻沿各自的轨道经 j 步后的距离, $\langle \cdot \rangle$ 表示对所有 k 的平均, 而 Δt 为对时间序列的采样周期. 这种算法由于充分地利用了能够利用的数据, 并对它们进行了某种意义上的平均, 因而

结果比较稳定, 但却大大地增加了计算量. 总之, 目前轨道跟踪法仍然存在以下三个问题: 1) 精度不高; 2) 受噪声影响大; 3) 计算量大、所需存贮空间大、收敛速度慢、很难应用.

在应用轨道跟踪法时, 首先要重构相空间. 自从 1981 年 Takens^[6]提出了嵌入定理以来, 相空间重构技术得到了很大的发展. 但是仍然存在着计算复杂, 整体性差等缺点.

本文在 Kugiumtzis 等工作的基础上^[7-15]提出了一套简单易行的相空间重构方法, 并针对轨道跟踪法的现有问题提出了一种新的计算 λ_1 的方法. 在仿真试验中, 本算法的计算结果表现出了很强的鲁棒性. 本方法计算量小、所需存贮空间小、收敛速度较快、能实现对 λ_1 的在线计算, 因而是一种很实用的好方法.

2 本文的改进算法

本文算法的主要思想是: 在计算最大李雅普诺夫指数时, 不能忽视混沌吸引子中的收缩作用(the action of contraction). 但至今, 混沌吸引子中的这一重要作用并没有得到高度的重视, 因而也未能在现有的算法中体现出来.

混沌吸引子是耗散系统的专有特征, 是扩散(expansion)与收缩两种作用互相牵制的结果. 为了维持混沌吸引子的存在, 总的收缩率必然要超过总

[†] 通讯地址: 海军大连舰艇学院 222[#], 大连 116018.

的扩散率. 这样, 即使在系统具有几个正的李雅普诺夫指数时, 如果对整个李雅普诺夫指数谱进行求和, 所得结果仍然是负值. 因此, 在运用轨道跟踪时, 不能用对某一方向或所有方向上的李雅普诺夫指数进行平均的方法来求取 λ_1 , 而应该每次都在最大方向上估计 λ_1 , 然后再对所有估计值进行平均求取 λ_1 .

2.1 相空间重构

重构的相空间是否贴近实际未知系统, 对系统特性的进一步刻划具有较大影响. 对于 N 点标量时间序列 $\{x(t_0 + k \cdot \Delta t) : k = 0, 1, \dots, N-1\}$, 可以用 Takens 嵌入定理去重构相空间 R^m

$$X_i = (x(t_i), x(t_i + p \cdot \Delta t), \dots, x(t_i + (m-1)p \cdot \Delta t)) \\ i = 1, 2, 3, \dots, M$$

$$x(t_r) = x(t_0 + (r-1) \cdot \Delta t) \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

这里 X_i 是重构相空间 R^m 中 M 点重构轨迹中的第 i 个点, 而 $M = N - (m-1)p$, m 是嵌入维, $\tau = p \cdot \Delta t$ 是时间延迟, $\tau_w = (m-1)\tau$ 是时间窗, 其中 Δt 为采样周期. 可见, 在重构相空间时只要选择 m , τ 和 τ_w 中的任意两个参数即可, 另一个参数可由 $\tau_w = (m-1)\tau$ 直接求得.

研究中发现, 可选择原始时间序列的平均峰值时间 (mtbp) 作为 τ_w . 另外, τ_w 的大小有一个范围, τ_w 必须满足: $\tau_w \min < \tau_w < \tau_w \max$, 否则重构将会变坏, 其中 $\tau_w \min$ 可用 $\tau_w \min = (12)^{1/2} \sigma(x) \sigma(dx/dt)$ 来估计^[8], 其中 $\sigma(\cdot)$ 为均方差, 对 Lorenz-1 (见表 1) 来说, $\tau_w \min \approx 0.67$ ($N = 4000$ 时的结果). 不难看出 $\text{mtbp} = 4\sigma(x) \sigma(dx/dt)$, 因此 mtbp 是始终大于 $\tau_w \min$ 的. 对 Lorenz-1 系统来说, 本文选择 $\tau_w = 0.78$, 此结果与上述这些分析是完全一致的. 在选择 τ_w 以后, 还要对 τ 或 m 作出选择. 由于 τ 的大小与信号自身的相关程度有关, 相关程度越低, τ 就应越小, 因此对带有噪声的信号重构时, τ 不能太大. 另一方面, 随着 m 的增大, τ 也应减小^[9-11], 当 m 足够大时, τ 就可以选得很小. 因此, 本文选择最大的 m 而得到最小的 τ , 即 $\tau = \Delta t$, $p = 1$. 本文同时注意到 Schouten 等^[12] 在估计带有噪声的吸引子分形维时也采用了这种用法.

综上所述, 本文采用下列方法来重构相空间: 1) 求取原始时间序列的 mtbp , 让 $\tau_w = \text{mtbp}$ (可以让 τ_w 稍大于 mtbp), 带有噪声的时间序列可经滤波后再求取 mtbp ; 2) 选择 $p = 1$, 即 $\tau = \Delta t$; 3) $m =$

$$\tau_w / \tau + 1.$$

2.2 计算 λ_1

假设重构轨迹中的第 i 个点 X_i 的最近邻为 X_{ip} , 即满足: $\|X_{ip} - X_i\| = \min_j \|X_j - X_i\|$, $\|\cdot\|$ 为欧氏范数. 在这里需要对两点的时间间隔作出规定. 假设 $\tau_w / \Delta t < |j - i| < R\tau_w / \Delta t$, $1 < R < 10$. $|j - i| > \tau_w / \Delta t$ 可以保证 X_i 和 X_{ip} 是在不同的轨道上. 而 $|j - i| < R\tau_w / \Delta t$ 可以保证一次计算 λ_1 所需的点数很少, 这样不仅节省了大量的计算时间, 而且大大地减少了计算时所需的存贮空间. R 可以选择为一个常数, 用以避免最近邻之间的距离为零, 不可太大和太小. R 太大会使最近邻之间的距离受到噪声的影响很大, 而 R 太小又会两个最近邻完全失去相关性, 同样可能会出现距离为零的情况.

为了能在扩散的最大方向上计算 $\lambda_1(i)$, 可用下式来求 $\lambda_1(i)$:

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{jh \cdot \Delta t} \log \frac{\|X_{ip+jh} - X_{i+jh}\|}{\|X_{ip} - X_i\|} \\ = \max_h \left\{ \frac{1}{h \cdot \Delta t} \log \frac{\|X_{ip+h} - X_{i+h}\|}{\|X_{ip} - X_i\|} \right\} \quad (1)$$

这里需要附加两个条件

$$(i) \quad 1 < h < a\tau_w / \Delta t \quad 0 < a < 1;$$

$$(ii) \quad \arccos \left(\frac{(X_{ip} - X_i) \cdot (X_{ip+h} - X_{i+h})^T}{\|X_{ip} - X_i\| \cdot \|X_{ip+h} - X_{i+h}\|} \right) < b \cdot (80^\circ) \quad 0 < b < 1, b \propto m.$$

由于时间相隔小于 τ_w 时的两点可以认为是同一条轨道上, 所以条件 (i) 保证了由最近邻演化后的两点仍然分别保持在各自的轨道上, 其中 a 也为常数. 然而虽然有了条件 (i) 的限制, 但还不能保证 $X_{ip+jh}X_{i+jh}$ 与 $X_{ip}X_i$ 的方向是基本一致的, 用方向上相差比较大的 $X_{ip+jh}X_{i+jh}$ 与 $X_{ip}X_i$ 来计算 $\lambda_1(i)$ 同样是没有意义的. 条件 (ii) 就是为了防止在有较大扭曲的轨道中计算 $\lambda_1(i)$, m 越大扭曲的程度越大, 因而, 限制的角度应相应增大, 也即限制的条件应适当放松, 但最大不能超过 80° . 条件 (ii) 使 (1) 式对 $\lambda_1(i)$ 的计算更加合理. 由此可见, 利用 (1) 式及其两个附加条件计算的 $\lambda_1(i)$ 真正代表了系统局部最大的李雅普诺夫指数, 其中参数 b 与嵌入维 m 成正比, 它们可以用一简单的线性关系来表示.

最后, 可得

$$\lambda_1 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_1(i).$$

表 1 本文算法的计算结果

系统	Δt	λ_1 理论值	SNR	λ_1 计算值	误差 /%
Logistic $X_{i+1} = 4x_i(1-x_i)$	1	0.693	-50	0.3983	42.5
			-40	0.4064	41.4
			-20	0.3960	42.9
			-15	0.4046	41.6
			-10	0.4030	41.8
			-5	0.3947	43.0
			0	0.4160	40.0
			5	0.4210	39.2
			10	0.4378	36.8
			100	0.7060	1.9
Hénon $x_{i+1} = 1 - 1.4x_i^2 + y_i$ $y_i = 0.3x_i$	1	0.418	-50	0.3340	20.1
			-40	0.3225	22.8
			-20	0.3260	22.0
			-15	0.3310	20.8
			-10	0.3300	21.1
			-5	0.3180	24.9
			0	0.3220	23.0
			5	0.3046	27.1
			10	0.3054	26.9
			100	0.3960	5.3
Lorenz-1 $\dot{x} = -(8/3)x + yz$ $\dot{y} = -10y + 10z$ $\dot{z} = -yx + 28y - z$	0.01	2.06	-50	2.9440	42.9
			-40	2.6612	29.2
			-20	2.8115	36.5
			-15	2.4082	16.9
			-10	2.2550	9.5
			-5	1.9628	4.7
			0	2.0560	0.2
			5	1.7986	12.7
			10	1.7600	14.6
			100	2.0690	0.4
Lorenz-2 $\dot{x} = 16.0(y-x)$ $\dot{y} = x(45.92 - z) - y$ $\dot{z} = xy - 4.0z$	0.01	1.50	-50	0.8496	43.4
			-40	0.8602	42.7
			-20	0.8115	45.9
			-15	0.8390	44.1
			-10	0.8574	42.8
			-5	0.9690	35.4
			0	1.1600	22.7
			5	1.2149	19.0
			10	2.0800	38.7
			100	1.5660	4.4
Rössler $\dot{x} = -y - z$ $\dot{y} = x + 0.15y$ $\dot{z} = 0.20 + z(x - 10.0)$	0.1	0.09	-50	0.1620	80.0
			-40	0.1000	11.0
			-20	0.1274	41.6
			-15	0.1285	39.8
			-10	0.1205	33.9
			-5	0.1139	26.6
			0	0.0890	1.1
			5	0.0787	12.6
			10	0.0767	14.8
			100	0.0930	3.3

3 仿真结果及分析

3.1 实验概况

为了证明算法的有效性,我们用四种著名的混沌系统来进行验证.计算结果呈现在表 1 和图 1 中.本文使用的原始时间序列是通过 4 阶 Runge-Kutta 法求解相应的微分方程获得的,其中 Δt 为采样周期.对每个系统来说,都是在吸引子的附近选择求解方程的初值,并抛弃所有过渡点.在各种情况下,都是使用 4000 个点的 x 坐标作为原始的时间序列.而带有噪声的时间序列,则是由相应的原始时间序列叠加白噪声构成的.图 1 是在信噪比 SNR = 100 情况下的 $\lambda_1(i)$ 曲线,其中横坐标为 i ,纵坐标为 $\lambda_1(i)$,该图展示了算法的收敛情况.

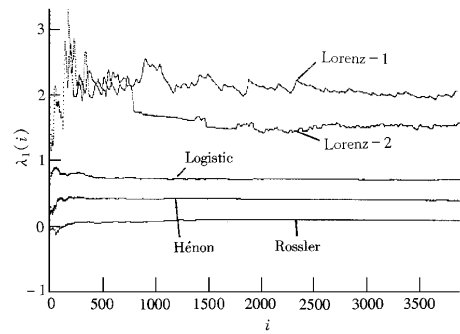


图 1 算法收敛图

3.2 讨论

由表 1 可以看出,当 SNR = 100 时,本算法求得的 λ_1 的误差均在 5.3% 以内(参见表 1 中黑体数据).而 Rosensteir^[5]的算法在 SNR = 10⁴ 还未达到这样的结果(表 2).可见,本算法具有比较高的精度.另外,当 SNR \geq -20 时,所有结果的误差都在 46% 以内,这一结果明显优于文献[15]的结果(表 2).即使在 SNR = -40 的情况下,也达到了文献[15]所要求的精度,而文献[15]在 SNR = -25 时就不能有效地提取 λ_1 了.可见本算法具有很强的鲁棒性和提取混沌弱信号的能力.从图 1 来看,本算法的收敛速度也是很快的.对于 Logistic, Hénon 和 Rössler 三个系统来说,在 300 点时结果就已稳定;

而对于两个 Lorenz 系统来说,在 1000 点时也都基本收敛了.当然,我们不难看出 Lorenz-2 要比 Lorenz-1 的收敛情况好一些.这一结果与 Eckmann^[16]的观点是一致的.在计算 λ_1 时,所需要的时间序列的基本点数 N 应满足 $\log N > d \cdot \log(1/\rho)$,其中 d 为真实吸引子的相关维, ρ 为设定的邻域半径与重构吸引子的直径之比.可见相关维越高的系统,其收敛越慢(Lorenz-2 的 $d = 2.06$, Hénon 的 $d = 1.26^{[3]}$).

表 2 文献 15 的计算结果

系统	Δt	λ_1 理论值	SNR	λ_1 计算值	误差/%
Lorenz-2 $\dot{x} = 16.0(y-x)$ $\dot{y} = x(45.92-z) - y$ $\dot{z} = xy - 4.0z$	0.01	1.50	-20	1.679	11.91
			-15	1.857	23.77
			-10	2.061	37.38
			-5	2.152	43.49
			0	2.163	44.22
			5	2.002	33.52
Rössler $\dot{x} = -y - z$ $\dot{y} = x + 0.15y$ $\dot{z} = 0.20 + z(x - 10.0)$	0.1	0.09	10	1.967	31.19
			100	1.680	12.01
			-20	0.131	45.45
			-15	0.123	36.98
			-10	0.112	24.69
			-5	0.126	40.04
			0	0.134	49.17
			5	0.139	55.14
			10	0.129	43.78
			100	0.116	29.78

本文算法之所以受噪声的影响很小,主要有两个原因:

1) 重构参数选择的好,重构的质量很高.

用主元分析法确定嵌入维 m 被认为是一种能够提高 SNR 的重构方法^[13-15].这种方法的基本思想是:首先给定一个 s 维超空间,然后找出最小的能近似给出吸引子边界的超平面,这个超平面是由样本协方差矩阵的若干个最大的奇异值扩展而来的.如果在局部区域应用这种方法,它能给出流形切空间的维数.如果将一网状局部区域的维数进行平均,就能够估计出鲁棒性好的嵌入维.但是,这种方法的结果依赖于 s 的选择,也即依赖于 τ_w 的选择^[7].本文在研究中发现,利用主元分析法确定的 m 不仅可能会随着 s 的不同而不同,而且可能会随着数据长度 N 的不同而异.当然,数据长度 N 超过某一值时, m 通常将不再发生变化.但如选择 s 为 $\text{mtbp}/\Delta t$, m 达到稳定时所需要的 N 很小.表 3 给

出了在不同的 s 和 N 情况下,用主元分析法确定 Logistic 映射嵌入维时的结果,此时 $\text{mtbp} \approx 3$,并设阈值为 0.07(选定的最小奇异值).主元分析法的另一个缺点就是很难对确定 m 时的阈值作出客观的选择,这是因为一个流形上的奇怪吸引子通常是没有明显边界的.因此,在运用主元分析法时,阈值的确定具有比较强的主观性.

让 $\tau_w = \text{mtbp}$,体现了把一个周期行为作为一个单位,来研究信号长期行为的思想,这是一个很有实际意义的思想.

表 3 主元分析法确定的 Logistic 映射的嵌入维

s	3	6							
N	50 > 60	200	300	500	1000	2000	3000	4000	>8000
m	3 4	5	6	7	5	3	2	4	1

2) 计算 λ_1 时的降噪作用.

假设 D_i 为两点的初始距离, D_{i+jh} 为经过 jh 步的距离,期望为零的噪声引起 D_i 与 D_{i+jh} 的改变量分别为 ΔD_i 与 ΔD_{i+jh} , 则

$$\Delta \lambda_1 = \frac{1}{\Delta t(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} \left\{ \frac{1}{jh} \log \frac{(D_{i+jh} + \Delta D_{i+jh})D_i}{(D_i + \Delta D_i)D_{i+jh}} \right\}$$

若假设 D_{i+jh} 与 D_i 是不相关的,那么 $\Delta \lambda_1$ 的期望 $E(\Delta \lambda_1) = 0$,这使得 $\Delta \lambda_1$ 在 M 足够大时,不影响 λ_1 的均值.本文在计算 λ_1 时,由于 jh 具有一定的随机性,降低了 D_{i+jh} 与 D_i 的相关性,因而比以往那些固定 jh 的算法要优越.

由于本算法每次只在 $2R(m-1)$ 个重构点中寻找基准点的最近邻,不需要在整个重构点中寻找最近邻,因而大大地节省了一次计算 $\lambda_1(i)$ 的时间和数据的存贮空间,当数据比较稳定时,我们还可以利用第一次计算 $\lambda_1(i)$ 所需的原始数据来提取 τ_w ,因而本算法能实现对 λ_1 的在线计算,这是目前许多方法都做不到的.

4 结 论

本文提出了一种从混沌时间序列中提取最大李雅普诺夫指数的新算法,由于本算法的基本思想与以往算法相比更加符合最大李雅普诺夫指数的定义,所以得到了一个比较好的结果.本算法非常实用,它具有以下三个主要优点:1) 较高的精度;2) 很强的抗噪声能力;3) 计算时间短,所需存贮空间小,且能实现在线算法.

- [1] T. Tanaka *et al.*, *Physica*, **D111** (1998) 42.
 [2] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57** (1985) 617.
 [3] H. D. I. Abarbanel, *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993), 1331.
 [4] A. Wolf *et al.*, *Physica*, **D16** (1985) 285.
 [5] M. T. Rosenstein *et al.*, *Physica*, **D65** (1993), 117.
 [6] F. Takens, *Lecture Notes in Mathematics*, **898** (1981), 366.
 [7] D. Kugiumtzis, *Physica*, **D95** (1996), 13.
 [8] A. Potapov, *Physica*, **D101** (1997) 207.
 [9] Y. C. Lai *et al.*, *Phys. Lett.*, **A218** (1996) 30.
 [10] Y. C. Lai *et al.*, *Physica*, **D115** (1998), 1.
 [11] E. Olbrich *et al.*, *Phys. Lett.*, **A232** (1997) 63.
 [12] J. C. Schouten *et al.*, *Phys. Rev.*, **E50** (1994), 1851.
 [13] D. S. Broomhead *et al.*, *Physica*, **D20** (1986) 217.
 [14] J. Yuan *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46** (1997), 1291 (in Chinese) 袁 坚等 *物理学报*, **46** (1997), 1291].
 [15] J. Yuan *et al.*, *Acta Electronica Sinica*, **25** (1997), 102 (in Chinese) 袁 坚等 *电子学报*, **25** (1997), 102].
 [16] J. P. Eckmann *et al.*, *Physica*, **D56** (1992), 185.

A ROBUST METHOD FOR ESTIMATING THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT

YANG SHAO-QING

(*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

ZHANG XIN-HUA

(*Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China*)

ZHAO CHANG-AN

(*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

(Received 9 April 1999 ; revised manuscript received 21 May 1999)

ABSTRACT

The largest Lyapunov exponent is an important parameter of detecting and characterizing chaos produced from a dynamical system. In this paper, based on the technology of phase space reconstruction and the methods of trajectory tracing, a new algorithm is proposed for estimating the largest Lyapunov exponent from a scalar chaotic time series. This method, which can overcome the deficiencies of the existing methods, has three main advantages: (1) It has highly accurate results; (2) It is little affected by noise; (3) It only needs a little time of computation and small space of memory and can calculate the largest Lyapunov exponent on line.

PACC : 0545