第 49 卷 第 5 期 2000 年 5 月
1000-3290/2000/49(05)/0830-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 5, May, 2000

基于参数自适应控制的混沌同步

贺明峰 穆云明 赵立中
(大连理工大学应用数学系,大连 116023)
(1999 年 8 月 6 日收到;1999 年 11 月 20 日收到修改稿)

讨论了驱动系统和响应系统都是相同混沌映射但其中参数不同时的同步问题. 采用参数自适应控制算法,当混沌映射为 logistic 映射时,得到两系统同步得一个充分条件,而为一般混沌映射时,得到两系统同步的一个必要条件. 还讨论了存在相同噪音时的同步问题.

PACC:0545;0500

1 引 言

近来,相同混沌系统的同步问题受到多种学科的专家们的关注[1—3]. 这里相同混沌系统指的是两个系统的动力学方程表示形式及其参数是相同的. 在文献[1,3]中讨论了两个相同 logistic 映射的同步问题以及有相同噪音时的同步稳定性. 在文献[2]中讨论了相同 logistic 映射在反馈函数分别为线性和非线性函数时的同步方案. 在文献[4]中,讨论了利用参数自适应控制算法,通过逐步调正参数的途经,使两系统参数达到一个预定值. 在文献[5]中讨论了混沌 Lorenz 系统的控制问题,提出了一种控制混沌的方法.

本文考虑两个混沌映射的函数形式相同但其中参数不同的同步问题. 采用参数自适应控制算法对 logistic 映射给出同步的一个充分条件,而对一般混沌映射给出了同步的一个必要条件.

2 Logistic 映射的同步

考虑由 logistic 映射表示的两个混沌系统

$$x_{n+1} = u_c x_n(1 - x_n),$$

$$y_{n+1} = u_0 y_n(1 - y_n),$$

其中 $3.57 \leqslant u_0, u_c \leqslant 4, 0 < x_0, y_0 < 1$ 对任意的初始条件 x_0, y_0,显然它们的轨迹是毫不相干的. 混沌同步的目的就是通过一定的同步方案使得

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0.$$

现通过控制响应系统的输入及系统参数的方法,给出两个系统的同步方案为迭代以下三个方程:

$$x_{n+1} = u_c x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

$$y_{n+1} = u_n x_n(1 - x_n), \tag{2}$$

$$u_{n+1} = u_n + \alpha(y_{n+1} - x_{n+1}), \tag{3}$$

其中 $x_0 \in (0,1), u_0, u_c \in [3.57, 4]$, (1), (2)式分别叫做驱动系统和响应系统,称$(y_{n+1} - x_{n+1})$为控制函数,α 为控制刚度. 下面讨论当 α 为何值时,由(1),(2),(3)式构成的迭代系统是收敛的,即对任意的 x_0, u_0, u_c 均有

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0.$$

记 $\Delta u_n = u_n - u_c, e_n = y_n - x_n$,则有

$$e_{n+1} = \Delta u_n x_n(1 - x_n). \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式得

$$u_{n+1} = u_n + \alpha \Delta u_n x_n(1 - x_n).$$

两边减去 u_c,有

$$\begin{aligned}\Delta u_{n+1} &= \Delta u_n + \alpha \Delta u_n x_n(1 - x_n) \\ &= [1 + \alpha x_n(1 - x_n)]\Delta u_n,\end{aligned}$$

即

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_0 \prod_{i=1}^{n} [1 - \alpha x_i(1 - x_i)]. \tag{5}$$

由 $x_0 \in (0,1)$ 可知 $x_i \in (0,1)$,从而 $x_i(1 - x_i) \in (0, 1/4)$,由此,若要$|1 + \alpha x_i(1 - x_i)| < 1$,只要取 $\alpha \in (-8, 0)$. 即当 $-8 < \alpha < 0$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} [1 + \alpha x_i(1 - x_i)] = 0.$$

亦即$\lim\limits_{n\to\infty} \Delta u_n = 0$,由(4)式,知$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$. 所以 $-8 < \alpha < 0$ 为(1),(2),(3)式构成的迭代系统同步的一个充分条件,但它不是同步的必要条件. 如取 $u_0 = 3.9, u_c = 4, x_0 = 0.694$,则可以验证当 $\alpha \in (-15.7,$

0)时,即可发生同步.

为使同步尽早发生,可通过逐步调试控制刚度的方法实现,此时(3)式变为

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_n(y_{n+1} - x_{n+1}). \quad (6)$$

相应地,(5)式变为

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_0 \prod_{i=1}^{n} [1 + \alpha_i x_i(1 - x_i)]. \quad (7)$$

对任意 $0<\varepsilon<1$ 如要 $|1+\alpha_i x_i(1-x_i)|=\varepsilon$,只要

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon - 1}{x_i(1 - x_i)} \text{ 或 } \alpha_i = -\frac{\varepsilon + 1}{x_i(1 - x_i)},$$

此时由(7)式知 $\Delta u_{n+1}=\Delta u_0\varepsilon^n$,所以可以适当选取 ε,以使其尽快收敛到 0. 如取 $\varepsilon=1/10$,则只需迭代 10 步,就可在 10^{-10}的精度下实现同步.

上述同步方案在有共同噪音干扰的情形下同样适用.存在噪音干扰下的动态系统为

$$x_{n+1} = u_c x_n(1 - x_n) + \upsilon_n, \quad (8)$$

$$y_{n+1} = u_n x_n(1 - x_n) + \upsilon_n, \quad (9)$$

其中 υ_n 表示噪音信号,且在其干扰下仍有 $x_n, y_n \in (0,1)$. 对响应系统的参数仍采用形如(3)式的控制方程进行控制.由于噪音信号相同,所以仍有

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n[1 + \alpha x_n(1 - x_n)].$$

故无噪音干扰时的混沌同步问题的结论在此适用.也就是说,参数自适应控制算法用于混沌同步对共同噪音是稳定的.而(8),(9)式的噪音不同时的同步问题还有待进一步研究.

3　一般混沌映射的同步

设 $f(\cdot, u)$为一般的混沌映射的表示形式,其中 u 为参数.考虑如下迭代系统的同步问题:

$$x_{n+1} = f(x_n, u_c), \quad (10)$$

$$y_{n+1} = f(x_n, u_n), \quad (11)$$

$$u_{n+1} = u_n + \alpha G(y_{n+1} - x_{n+1}), \quad (12)$$

其中 $G(y_{n+1} - x_{n+1})$为控制函数,α 为控制刚度.仍记 $\Delta u_n = u_n - u_c$, $e_n = y_n - x_n$,则

$$u_{n+1} = u_n + \alpha G[f(x_n, u_n) - f(x_n, u_c)],$$

$$e_{n+1} = f(x_n, u_n) - f(x_n, u_c).$$

若函数 $f(x,u)$关于变量 u 可微,则可得

$$u_{n+1} = u_n + \alpha G\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}\Delta u_n\right), \quad (13)$$

$$e_{n+1} = \frac{\partial f_n}{\partial u}\Delta u_n, \quad (14)$$

其中$\frac{\partial f_n}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_n, u_n')$,$u_n'$为介于 u_n 与 u_c 之间的一个值.若 $G(\cdot)$在 0 点二阶可导,将 $G(\frac{\partial f_n}{\partial u}\Delta u_n)$在 0 点进行 Taylor 展开,并略去 Δu_n 的二次项,代入(13)式可得

$$u_{n+1} = u_n + \alpha G(0) + \alpha G'(0)\frac{\partial f_n}{\partial u}\Delta u_n,$$

即

$$\Delta u_{n+1} = \alpha G(0) + \left[1 + \alpha G'(0)\frac{\partial f_n}{\partial u}\right]\Delta u_n. \quad (15)$$

由(14)式,若要 $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$,需使 $\lim_{n\to\infty}\Delta u_n = 0$. 而由(15)式,若要 $\lim_{n\to\infty}\Delta u_n = 0$,需有 $G(0)=0$,$G'(0)\neq 0$.由此得如下结论:

设由(10)–(12)式构成的迭代系统中,$f(x,u)$关于 u 可微,$G(0)$在 0 点二阶可导,则该系统同步的必要条件是 $G(0)=0$,$G'(0)\neq 0$.当上述必要条件满足时,有

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_0 \prod_{i=1}^{n}\left[1 + \alpha G'(0)\frac{\partial f_i}{\partial u}\right],$$

据此可给出 α 的取值范围以实现同步.

4　结　　论

本文对不同参数的 logistic 混沌映射给出了基于参数自适应控制算法的混沌同步方案,并推导出对控制刚度 α,$-8<\alpha<0$ 为混沌同步的充分条件.同时给出了变控制刚度法以使尽早实现同步.本文还讨论了一般混沌映射的同步问题.对于控制函数 $G(\cdot)$,$G(0)=0$,$G'(0)\neq 0$ 是混沌同步的必要条件.

[1] M. K. Ali, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 4804.
[2] P. Parmanada, *Phys. Lett.*, **A240**(1998), 55.
[3] Omer Morgul, *Phys. Lett.*, **A247**(1998), 391.
[4] D. Vassiliadis, *Physica D*, **71**(1994), 319.
[5] J. Z. Yu *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 397 (in Chinese) [余建祖、苏　楠、T. L. Vincent, 物理学报, **47**(1998), 397].

SYNCHRONIZATION ON USING PARAMETRIC ADAPTIVE CONTROL ALGORITHM

HE MING-FENG MU YUN-MING ZHAO LI-ZHONG
(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)
(Received 6 August 1999; revised manuscript received 20 November 1999)

ABSTRACT

We study the synchronization of the drive system and response system which are described by the same chaotic maps but have different parameters. We propose a parametric adaptive control algorithm and show that when the maps are logistic ones, we can draw a sufficient condition for the synchronization, and that when they are general maps, we can draw a necessary condition for the synchronization. This paper also studies the synchronization of two chaotic systems which are subjected to common noise.

PACC: 0540; 0500