第 49 卷 第 5 期 2000 年 5 月
1000-3290/2000/49(05)/0833-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 5, May, 2000
©2000 Chin. Phys. Soc.

常微分方程系统李雅普诺夫特性指数的研究*

何岱海† 徐健学 陈永红

(西安交通大学非线性动力学研究所,西安 710049)

(1999 年 9 月 6 日收到;1999 年 9 月 23 日收到修改稿)

讨论常微分方程系统李雅普诺夫特性指数的一些基本问题,包括数值计算技术和常微分方程系统任何平衡点以外极限集的李雅普诺夫指数必有一个为零的结论.给出超混沌吸引子必超出 3 维的结论,指出基于常微分方程求解李雅普诺夫指数的 Wolf 程序使用中初值的选取对结果的影响.同时提出一种简便可行的计算条件李雅普诺夫指数方法.通过数值研究一些重要模型进一步说明本文的观点及提出的方法.对常微分方程系统任何平衡点以外极限集的李雅普诺夫指数必有一个为零的结论进行了讨论,可以作为分析结果和计算方法的有利工具,在一些工作中被忽视.

PACC:0545

1 引 言

李雅普诺夫特性指数(LCE)是对平衡点处特征值概念的推广.利用它可以数值判定系统概周期及混沌行为[1,2].对于 n 维相空间有 n 个 LCE 度量初始单位椭球 n 个轴拉伸和压缩的程度.许多系统,在一个轴上的拉伸意味着一个正 LCE.然而,另一些系统在动力学演化中存在两个或两个以上拉伸的轴,结果导致两个或两个以上正 LCE.这样的系统称为超混沌系统.条件 LCE 用来判定被某一变量驱动的系统与原系统的同步稳定性.某系统的子系统的全部条件 LCE 为负保证其复制系统(接收器)在驱动变量作用下与原系统(发送器)达到同步.

2 非线性常微分方程系统 LCE 性质及其求解的讨论

求解系统的 LCE 可以更好地认识系统的本质[1].Wolf 等提出基于 Cram-Schmidt 正交化的求解方法[3].一种更有效且数值稳定的方法由 Bremen 等给出[4],同时给出几种求解方法比较全面的比较.他们的方法是基于分解系统在切空间的 Jacobian 矩阵为正交阵 Q 和包含正对角元素的上三解阵 R.这样的分解可以通过用 Gram-Schmidt(GS)正交化(或修正 GS(MGS),重正交 GS(RGS))或所谓的 QR 分解方法及其修正方法,其中一种利用 Householder 变换的修正方法(HQR)相当于 Givens 旋转更为有效.

Parker 和 Chua(蔡少堂)在文献[1]中给出证明(源于 Haken[1983]),对于除平衡点以外任何极限集,三维及三维以上常微系统必有一个零 LCE.只要看到非线性方程的一个解 $x(t)$,其时间导数 $\dot{x}(t)$就是对应的线性伴随方程 $\dot{y}=J|_{x(t)}y$ 的一个解.对极限环或混沌吸引子来说 $\dot{x}(t)$都是有限的.因此 $\dot{x}(t)$作为伴随方程的一支解,这时一个 LCE 为零.注意到,混沌系统必至少有一个零 LCE 和一个正 LCE,且全部 LCE 之和小于零,显然一个常微分方程系统的奇怪吸引子必有至少三个 LCE,又由于超混沌系统必有至少两个正 LCE,所以超混沌系统有至少四个 LCE,再利用 Kaplan-Yorke 关于吸引子 LCE 和分形维数的猜想,超混沌奇怪吸引子分形维必超出三维空间.

为了达到稳态在计算过程中通常由任取初值开始并舍掉大量的过渡结果.本文在计算中,初值的确定都是任取的,然后经足够长的独立的演化过程得到的末状态值再作为初值.计算 LCE 采用了 Wolf 提出的程序[3].但是原程序中没有指出初值的选

* 国家自然科学基金(批准号:19702015)资助的课题.

† 现在地址 北京师范大学物理系,北京 100875.

取.任取初值开始 Wolf 程序直接计算 LCE,对收敛有很大影响.因为由 LCE 的理论计算公式,计算必须在吸引子轨道上进行,如果初值不在吸引子轨道上,开始的一段过渡过程,作用在 Jacobian 矩阵上,将对最终结果的收敛造成影响.忽视了这一点,可能造成舍掉的一段过渡过程中初始设定好的单位阵始终在进行演化.当计算 LCE 的实质性步骤开始时,单位阵已经面目全非.一种修正方法是使单位阵在实质性步骤开始时重新设置.另一种即本文采用的方法,先取初值,计算 LCE 都要多次,前一次的末状态值做为下一次的初值.这种方法在 Lorenz 系统及超混沌 Rössler 系统的计算中得到证实.这里给出 Lorenz 系统的计算结果,初值(9.23667,14.04743,29.92179)是经过计算并抛弃瞬态得到的.利用四阶 Runge-Kutta 算法,定步长 0.01,总步数为 20000,得到 LCE 为 2.16900,−0.00071,−32.46355,已经相当理想.如果总步数为 25000,前 5000 为过渡过程舍掉,此时单位阵已经被修改,得到 LCE 为 2.1670,0.2316,−25.7355.尤其为零的 LCE 受到严重影响.当总步数达到 805000,才能得到 LCE 为 2.16687,0.00747,−32.25250,较为理想.因此可见,计算 LCE 要保证初值选取的质量,实质性计算开始时要设置单位阵,否则对收敛影响严重.

3 条件 LCE 及其简便计算方法

条件 LCE 在理论定义上及其求解与 LCE 并无本质差异.通过分析我们给出对 Wolf 程序进行小改动,来求解条件 LCE 的方法,即在每一步设驱动变量对应的 Jacobian 阵的一行一列元素为零,并且不但适用于连续驱动同步方式下求解条件 LCE,而且适用于离散驱动同步和断续驱动同步方式,只要在驱动时刻(驱动系统与接收系统在该时刻耦合),置零 Jacobian 阵对应一行一列即可.

计算响应动力系统条件 LCE 的算法(基于 QR 分解来说明)

初始化

初始 Q 为单位阵

初始 LCEvector 为零向量

for $i=1$ to $m_$iterations

计算 Jacobian 阵 J_i

设置驱动信号对应的一行一列元素为零.

$B=J_iQ$

计算 QR 分解 of $B(QR=B)$

LCEvector = LCEvector + log(diag(|R|))

结束

LCEvector = LCEvector/$m_$iterations.

该算法已成功用于连续及离散驱动等方式的同步.对于诸如 Lorenz 和 Rössler 等系统的计算结果与经典结果吻合.这种方法非常简单有效.本文计算条件 LCE 时采用.

4 模型研究

4.1 超混沌 Rössler 系统的研究

超混沌 Rössler 系统模型[5]为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y-z,\\ \dot{y} &= x+0.25y+w,\\ \dot{z} &= 3+xz,\\ \dot{w} &= -0.5z+0.05w.\end{aligned}\tag{1}$$

用四阶 Runge-Kutta 积分该方程,定步长为 0.01,初值为 −18.8503,−29.5013,0.1483,30.1428.LCE 结果为 0.1776,0.0305,−0.0024,−37.0993,与经典结果吻合,说明计算程序可靠.条件 LCE 如表 1.

表 1 超混沌 Rössler 系统条件 LCE 计算结果

驱动变量为	条件 LCE
x	0.37558,0.04421,−36.92211
y	0.07400,−0.21349,−36.70480
z	0.16699,0.16396,0.08327
w	0.12400,0.00009,−36.67262

表 1 的计算结果表明:复制的超混沌 Rössler 系统不能被单一变量驱动达到与原系统的同步(没有一组条件 LCE 全部为负).尤其是 z 对应的条件 LCE 反而全部为正,因此 z 变量是最不稳定的,可能与非线性项出现在 z 对应方程中有关.

4.2 心脏-血液耦合动力学方程的研究

一种心脏-血液耦合动力系统混沌同步模型[6],由心脏自持张弛振荡、血液在心脏内的流体动力学和窦房结自律性振动三部分相互耦合,其基本方程是 7 维非线性系统,即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t &= Ex_2-Ex_1+Bx_4,\\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t &= Ax_1-x_2-x_1x_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_3/dt &= x_1x_2 - Gx_3, \\ dx_4/dt &= P_1x_5 + P_2x_4 - P_3x_4^3 + Mx_7, \\ dx_5/dt &= -P_1x_4 + Dx_1, \\ dx_6/dt &= P_0x_7 + 5.0x_6 - 6.0\times10^4x_6^3 + Hx_1, \\ dx_7/dt &= -P_0x_6 - Mx_4. \end{aligned} \tag{2}$$

式中符号的物理意义见文献[6]. 由于将心脏自持振荡、心脏内血液流动和窦房结自律振动三者有机地结合,从功能上体现 3 个子系统的相互作用,用高维混沌同步模型逼近右心和左心的协调动作及其同步化,比简单模型更合理. 数值模拟与正常人的 ECG 在形态上相似,具有一定生物学意义. 但原文在 LCE 计算上存在问题(计算方法、结果,例如吸引子维数 6.98). 下面给出本文的计算结果.

参数 $E=16.0$，$A=45.92$，$B=5.0$ 保持不变. 计算总步数 80 万，计算步长 0.002，采用四阶 Runge-Kutta 算法积分.

当参数 $G=4.0$，$P_0=10.0$，$P_1=3.4$，$P_2=60.0$，$P_3=12.0\times10^5$，$M=1.5$，$D=0.012$，$H=0.012$，计算得出系统是混沌的，LCE 为 2.162，−0.0064，−0.179，−7.9651，−26.9871，−39.0045，−92.7963.

当参数 $G=0.25$，$P_0=9.8$，$P_1=3.4$，$P_2=18.0$，$P_3=6.0\times10^5$，$M=1.5$，$D=0.012$，$H=0.012$，计算得出系统状态是极限环，LCE 为 0.0043，−0.4041，−1.002，−4.8715，−11.0609，−24.7067，−34.8965.

当参数 $G=4.0$，$P_0=10.0$，$P_1=3.4$，$P_2=18.0$，$P_3=12.0\times10^5$，$M=1.5$，$D=0.012$，$H=0.012$，计算得出系统是混沌的，LCE 为 2.1698，−0.0067，−0.5731，−8.0222，−28.5345，−40.1391，−105.6906. 第二个 LCE 可看作零，存在一个正 LCE. 此时条件 LCE(x_1 为驱动变量)得出 −0.5807，−3.4113，−3.6638，−8.0214，−36.3973，−105.5070，全部为负，两系统可以达到同步.

当参数 $G=0.25$，$P_0=10.0$，$P_1=3.4$，$P_2=18.0$，$P_3=6.0\times10^5$，$M=1.5$，$D=0.012$，$H=0.012$，计算得出 LCE 为 0.0092，−0.405，−1.006，−4.0125，−10.0374，−24.6452，−32.2462. 此时，系统状态是极限环.

当参数 $G=0.25$，$P_0=9.8$ 或 10.0，$P_1=3.4$，$P_2=60.0$，$P_3=6.0\times10^5$，$M=1.5$，$D=0.012$，$H=0.012$，计算得出 0.012，−0.051，−0.351，−4.4758，−11.7923，−24.5912，−34.7410 或 0.032，−0.0089，−0.507，−3.2813，−10.36752，−25.0897，−34.3382. 此时系统状态可能是两个零的情况，并不十分确定.

系统的状态不易判定 LCE 为正为零的个数. 可能与系统极不稳定及算法不适用有关，有待进一步研究.

综上，计算利用 Wolf 程序，初值的选取都是经过多次、长时间的检验，结果为得到的稳态值. 在心脏-血液耦合动力系统模型中发现了混沌，给出不同情况下条件 LCE 的值. 当系统是超混沌的，通常难以使用单变量驱动达到同步. 当系统是混沌的，同步或不同步两种情况都存在.

4.3　复数 Lorenz-Haken 系统模型的研究

本节研究复数 Lorenz-Haken 系统(CLHE)，其可以描述激光系统通过 Hopf 分岔导致不稳定性，即经过 Hopf 分岔走向混沌及超混沌. 方程经过变量变换成四变量的自治动力学方程[7]为

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -kx_1 + kx_2, \\ dx_2/dt &= r_1x_1 - x_2 - ex_3 + kx_3^2/x_1 - x_1x_4, \\ dx_3/dt &= r_2x_1 + ex_2 - x_3 - kx_2x_3/x_1, \\ dx_4/dt &= -bx_4 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

积分采用四阶 Runge-Kutta 算法，定步长为 0.001. 不同系统参数下的计算结果如表 2.

表 2　CLHE 系统的 LCE 计算结果

参数	LCE 的计算结果	状态
$K=6.0, r_1=43.3, r_2=-0.5, b=0.8, e=2.5$	0.6010，0.0030，−10.1079，−11.8448	混沌
$K=4.0, r_1=181.3, r_2=-1.5, b=0.5, e=2.5$	0.0001，−0.6927，−6.8258，−7.6429	极限环
$K=6.0, r_1=91.0, r_2=-1.5, b=1.2, e=2.5$	0.9106，0.0007，−10.0758，−12.7784	混沌

每一组均包含明显的零 LCE. 这个模型再次验证了 Haken，Parker 和 Chua 等关于零 LCE 的结论. 文献[7]的结果，忽略了这一点，认为该系统状态在以上参数下为超混沌的，并对其进行同步控制，结论是超混沌在某些情况下是可以通过单量驱动达到同步的. 条件 LCE 通过本文给出的简便求解方法不

难给出. 我们已验证其不是超混沌的,结果符合已有理论.

4.4 五维对流模型的研究

本节讨论五维大气对流非线性动力系统模型[8],系统方程为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t &= 1 - x_1 - x_2^2/2,\\
\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t &= (\mathrm{Re}x_1 - \pi^2)x_2 + x_4,\\
\mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t &= 1 - x_3 - ax_2x_4/2,\\
\mathrm{d}x_4/\mathrm{d}t &= c(x_3 - \Gamma)x_2 - \pi^2 x_4 - \pi x_2 x_5,\\
\mathrm{d}x_5/\mathrm{d}t &= -4\pi^2 x_5 + \pi\mathrm{Re}x_2x_4/2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

总步数 500000 以及步长 0.005,积分采用四阶 Runge-Kutta 算法.

当 Re = 25, Ri = 0.25,初值为 0.67634, −0.00146, 1.09373, 0.01304, −0.00002, LCE 为 0.0980, 0.0006, −3.1262, −3.9334, −56.8696,系统是混沌的(一个正 LCE 和一个零 LCE). 当 Re = 25, Ri = 0.29, LCE 为 −0.00065, −0.07075, −2.66157, −3.77003, −56.87333,系统状态为极限环. 每一组 LCE 都有明显的零 LCE. 系统状态可以确定.

在另外一些参数情况下[9],只发现了不动点. 当 Re = 25, Ri = 0.10, LCE 为 −0.7107, −0.7113, −8.2397, −8.2425, −56.1809 当 Re = 50, Ri = 0.05, LCE 为 −0.7186, −0.7205, −31.6061, −31.6065, −56.7386;当 Re = 50, Ri = 0.18, LCEs 为 −0.7139, −0.7159, −31.6027, −31.6033, −56.7390 当 Re = 50, Ri = 0.22, LCE 为 −0.7127, −0.7141, −31.6013, −31.6026, −56.7391.

全部结果 LCE 都服从 Haken, Parker 和 Chua 的结论,即至少一个明显的零 LCE. 文献[9]的结论可能没有收敛,与计算总步数过少有关(几千步).

5 结论和讨论

平衡点以外的极限集不具有任何零 LCE 的情况是否存在呢?虽然文献[9]给出了五维对流非线性动力系统的结果存在这种情况,但其结果可能还没有收敛. 我们的结果说明该模型在相同参数下符合零指数的结论. 但是在心脏-血液动力耦合动力系统的研究中,我们也发现这种不存在零 LCE 的情况. 我们作了大量的反复验证,尽管如此,这种情况很可能仍然是 1)算法的问题, 2)方程具有刚性, 3)系统在这种情况下极不稳定. 我们也仔细推敲了零指数的证明,其主要的思想是,在吸引子一段轨道上取相邻很近(前后关系)的两点,在演化过程中,这两点的距离将保持近似不变,既不指数发散也不收缩,而该方向将是切空间中的一个独立方向,这将导致一个零 LCE. 另外,在对复数 Lorenz-Haken 系统的计算中发现,结果包含零 LCE,而文献[7]的结果不包含零 LCE,所以本文结果是正确的. 本文归纳指出零 LCE 判定准则,零 LCE 可以用来初步判断一组 LCE 的准确性,或是否收敛,或算法是否适用. 本文给出一种简便求解条件 LCE 的技术,条件 LCE 被广泛应用[6,7],甚至相空间重构和筛形吸引域研究,而求解技术则很少涉及. 我们的计算结果说明方法的有效性. 本文指出在应用 Wolf 程序计算 LCE 时初值的选取可以很严重地影响结果的收敛.

对于高维复杂系统可能存在复杂的情况. Dawason 和 Grebogi 等人的一项工作[10],指出存在一种情况, LCE 谱中存在一个零上下波动的指数,此时实际上计算机产生的轨道已经不反映系统真实的轨道. 由于混沌对初值的极度敏感,计算机产生结果的可靠性,是首先应讨论的问题, Dawason 和 Grebogi 等人的工作是基于 Shadowing 定理. 但 Haken 的零 Lyapunov 指数定理,意义是显然的,应引起足够的重视,实际计算时出现与此相违背的结果,排除算法方面的错误,可能意味着新的复杂现象,比如零上下波动的指数的情况,在此情况下不存在真实混沌轨道与计算机产生的轨道相对应.

该工作受到马里兰大学的 C. Grebogi 教授给予指点和提供文献,在此表示感谢.

[1] T. S. Parker, L. O. Chua, Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems, Springer-Verlag, *World Publishing Corp.*, 66 − 81, 1989.

[2] F. C. Moon, Chaotic and Fractal Dynamics, A Wiley-Interscience Publication, 307, 1992.

[3] A. Wolf *et al.*, *Physica*, **D16**(1)(1985), 285.

[4] Hubertus F. Von Bremen *et al.*, *Physica*, **D101**(1)(1997), 1.

[5] O. E. Rössler, *Phys. Lett.*, **A71**(1)(1979), 155.

[6] Liu-qing Pei *et al.*, *Science in China* (*Series E*), **28**(1998), 83 (in Chinese) [裴留庆等,中国科学(E 辑), **28**(1998), 83].

[7] Jin-qing Fang, *Progress in Physics*, **16**(1997), 176 (in Chinese) [方锦清,物理学进展, **16**(1997), 176].

[8] Shi-da Liu *et al.*, *Chinese Journal of Computational Physics*, **7** (1990), 283 (in Chinese) [**刘式达等,计算物理,7(1990),283**].

[9] Yan-chun Bao *et al.*, *Chinese Journal of Computational Physics*, **15** (1998), 498 (in Chinese) [**保艳春等,计算物理,15(1998),498**].

[10] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994), 1927.

STUDY ON LYAPUNOV CHARACTERISTIC EXPONENTS OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM *

HE DAI-HAI† XU JIAN-XUE CHEN YONG-HONG

(*Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

(Received 6 September 1999; revised manuscript received 23 September 1999)

ABSTRACT

Some basic problems of Lyapunov Characteristic Exponents (LCE) are discussed, including the computational method and the fact that the Lyapunov exponent of any limit set other than an equilibrium point must be zero, namely one of the Lyapunov exponents should vanishes. The conclusion is deduced that the dimension of a hyper-chaotic attractor must be great than 3. The LCEs of several important models are studied, more reasonable results are yielded. An efficient method for calculating the conditional LCEs is suggested. By studying the conditional LCEs of the hyper-chaotic system, we conclude that it cannot be synchronized with only one driving variable. The infection of random initial values in Wolf's program of LCEs computation is pointed out.

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19702015).

† Address: Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China.