

实现连续时间标量(超)混沌信号同步控制的 非线性反馈方法*

高金峰 罗先觉 马西奎

(西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

(1999 年 9 月 27 日收到)

将非线性控制系统微分几何理论与 Lyapunov 方法相结合, 在一定的假设前提下, 设计了一个实现连续时间标量(超)混沌信号同步控制的非线性反馈控制器. 连续时间(超)混沌系统的标量输出在控制器的控制下, 不仅能同步于给定参考标量混沌信号, 而且是大范围渐近同步的. 计算机仿真结果也证实了设计控制器的有效性.

PACC: 0545

1 引言

以 Pecora 和 Carroll^[1]关于混沌系统可以实现主从同步论文的发表为开端, 在很多领域都兴起了混沌同步问题研究的热潮, 尤其是混沌同步在保密通信中的应用尝试^[2], 为混沌应用展示了美好的前景. 有关混沌同步的机制、方法已有很多报道^[3]. 就目前众多实现混沌系统同步的机理来分析大致可以归纳为两类: 其一是 Pecora 和 Carroll^[1]提出的依靠混沌系统的内部吸引性实现的主从式(包括主从子系统和对等系统)同步; 另一类是将同步问题作为控制问题来看待, 通过施加外部控制(包括参数控制和变量反馈控制)实现一个系统同步于另一个系统^[4-7]. 对于前一类方法, 并不是任选一个系统变量作为驱动信号都可以实现同步. 例如主从子系统同步方式中, 只有选择的驱动变量使子系统的条件 Lyapunov 指数全部为负时, 同步才得以实现. 对于后一类方法, 实现混沌的同步大都是以系统的所有状态变量都能得到并可以参加控制为前提^[4, 5]. 虽然也有通过标量时间序列实现混沌同步控制的报道^[6, 7], 但大部分都是对特定的系统进行处理且没有给出大范围同步的证明.

本文给出一种基于控制的同步方案, 该方案将非线性控制系统的微分几何理论与非线性动力学理

论相结合, 可以使给定的混沌系统同步于任意指定的单个状态变量或多个状态变量的线性或非线性的组合形成的标量信号, 并且同步是大范围渐近稳定的.

2 问题描述

给定两个非线性系统

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, t), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in R^n, \quad (1)$$

$$\hat{y} = \hat{h}(\hat{x}), \quad (2)$$

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x)u, x(0) = x_0 \in R^n, \quad (3)$$

$$y = h(x), \quad (4)$$

其中

$$f, \hat{f}: R^n \times R \rightarrow R^n \text{ 且 } f, \hat{f} \in C^\infty,$$

$$g: R^n \rightarrow R^n, h, \hat{h}: R^n \rightarrow R \text{ 且 } g, h, \hat{h} \in C^\infty,$$

$$x(t), \hat{x}(t) \in R^n, y, \hat{y} \in R, u \in R.$$

(1)(2)式组成的系统称为参考(目标)系统(3),

(4)组成的系统称为被控系统.

所谓同步控制问题即是要寻找一个合适的 $g(x)$ 和 u 使被控系统的输出 y 与 \hat{y} (以后称为参考信号)满足下式,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y - \hat{y}\| = 0. \quad (5)$$

换句话说, 就是要在参考信号 \hat{y} 和用来实现同步目的的混沌系统(3)和(4)式给定的情况下, 设计一种控制策略, 使(5)式成立.

* 西安交通大学研究生院博士论文基金(批准号 JDFXJU1999-15)资助的课题.

显然,本文的同步控制问题并没有对 f, h 和 \hat{f}, \hat{h} 的限制,即两个系统不一定完全相同.如若能找到一种控制策略,使(5)式成立,将具有重要意义.为方便,以下仅讨论(3)式为自治系统,即 f 中不显含时间 t 的情况.

3 控制器设计

在进行控制策略的讨论之前,首先介绍非线性控制系统微分几何理论的几个术语^[8].

函数 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 的李导数定义为 $L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f$, 函数 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 的高阶李导数定义为 $L_f^i h(x) = \frac{\partial (L_f^{i-1} h(x))}{\partial x} f, i = 1, 2, \dots$, 且 $L_f^0 h(x) = h(x)$.

函数 f 和 g 的李括号定义为 $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$, 通常记作 $ad_f g$; 高阶李括号是李括号的重复运算,并定义为 $ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g], i = 1, 2, \dots$, 且 $ad_f^0 g = g$.

由(3)和(4)式描述的系统称为单输入单输出(SISO)系统.如若当 $x \in R^n$ 时,有如

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad 0 \leq i < r-1, \quad (6)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (7)$$

成立,则称由(3)和(4)式描述的单输入单输出系统具有相对阶 r , 且 $r \leq n$.

当单输入单输出系统(3)和(4)有相对阶 r 时,可以引入一个微分同胚 $\phi(x) = [z_1^1, z_2^1, \dots, z_r^1, z_1^2, z_2^2, \dots, z_{n-r}^2]^T = [z^1, z^2]^T$ 进行坐标变换,使以 x 表示的系统变换的标准形式为

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= A z^1 + B(a(x) + b(x)u) \\ z^1(0) &= z_0^1 \in R^r, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{z}^2 = q(z^1, z^2) \quad z^2(0) = z_0^2 \in R^{n-r}, \quad (9)$$

$$y = z_1^1, \quad (10)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{r-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r \times r}, B = [0 \dots 0 \ 1]^T_{r \times 1},$$

$$z^1 \in R^r, z^2 \in R^{n-r},$$

$$z_i^1 = L_f^{i-1} h(x), i = 1, 2, \dots, r, a(x) = L_f^r h(x),$$

$$b(x) = L_g L_f^{r-1} h(x),$$

$$\phi(x) = [h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x), z_1^2,$$

$$z_2^2, \dots, z_{n-r}^2]^T.$$

(9)式中 $z^1 = 0$ 对应的 $z^2 = q(0, z^2)$ 称为零动态方程.特殊情况,当系统的相对阶 $r = n$ 时,零动态方程不再出现.

至此,我们可以讨论同步控制问题的控制器设计了.

假设1 参考信号 $\hat{y}(t)$ r 阶连续可导, \hat{y} 的 i 阶导数记为 $\hat{y}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, r$, 且

$$|\hat{y}^{(r)}(t)| < M_1, \forall t \in [0, \infty), M_1 \in R^+.$$

假设2 对于单输入单输出系统(3)和(4)式,无论其处于平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态,总有

$$\|x(t)\| < M_2, \forall t \in [0, \infty), M_2 \in R^+,$$

$$\|a(x)\| = \|L_f^r h(x)\| < M_3,$$

$$\forall t \in [0, \infty), M_3 \in R^+,$$

$$\|b(x)\| = \|L_g L_f^{r-1} h(x)\| < M_4,$$

$$\forall t \in [0, \infty), M_4 \in R^+,$$

以及

$$\|L_f^r h(x) - \hat{y}^{(r)}\| < W, \forall t \in [0, \infty), W \in R^+ \quad (11)$$

成立,式中的 r 为系统的相对阶.

对于给定的非线性系统(3)和(4)式,如若系统中的 $g(x)$ 不能任意选择,则不能保证其总有相对阶 $0 < r \leq n$;但若为了实现混沌同步控制,在假定系统中的控制关系 $g(x)$ 可以任意选择的前提下,必能找到一个 $g(x)$,使单输入单输出系统(3)和(4)式有相对阶 $0 < r \leq n$.

定义部分变量同步误差为

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ \vdots \\ z_r^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

因此有

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \dot{z}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_r^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}^{(1)} \\ \dot{\hat{y}}^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{\hat{y}}^{(r)} \end{bmatrix} \\ &= A z^1 + B(a(x) + b(x)u) \\ &\quad - A \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{bmatrix} - B \hat{y}^{(r)}, \end{aligned}$$

即

$$\dot{e} = Ae + B(a(x) - \hat{y}^{(r)}) + Bb(x)u. \quad (13)$$

至此,已将单输入单输出系统(3)和(4)式的输出 y 同步于标量参考信号 $\hat{y}(t)$ 的问题,转化为(13)式在合适的控制输入 u 作用下,有大范围渐近稳定平衡点 $e=0$ 的讨论.

于是有如下定理:

定理 1 若单输入单输出系统(3)和(4)式在特定的 $g(x)$ 下有相对阶 r ,且满足假设 1 与假设 2 的条件,控制器 u 取如下形式,

$$u = -\frac{1}{2b(x)}(R^{-1}B^TPe + k_0\text{sgr}(e^TPB)), \quad (14)$$

式中 P, R 为正定对称阵,并满足矩阵 Riccati 方程

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP = -Q, \quad (15)$$

其中的矩阵 $Q \in R^{r \times r}$ 也是对称正定阵.则当有 $k_0 > 2W$ 成立时,对于所有的初始条件 $x(0) \in R^n$, $e(0) \in R^r$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

证明 选择函数

$$V(e) = e^TPe, \quad (16)$$

由于 P 是一个对称正定阵,因此对所有的 $e \in R^r$, $V(e)$ 是正定函数.现对(16)式沿着(13)式对时间 t 求导并把(14)(15)式代入得

$$\begin{aligned} dV(e)/dt &= \dot{e}^TPe + e^T\dot{P}e \\ &= e^TA^TPe + e^TPAe + 2e^TPB(a(x) - \hat{y}^{(r)}) \\ &\quad + 2e^TPBb(x)u \\ &= e^TA^TPe + e^TPAe + 2e^TPB(a(x) - \hat{y}^{(r)}) \\ &\quad - e^TPBR^{-1}B^TPe - k_0e^TPB\text{sgr}(e^TPB) \\ &\leq -e^TQe + 2\|e^TPB\|\|a(x) - \hat{y}^{(r)}\| \\ &\quad - k_0e^TPB\text{sgr}(e^TPB), \end{aligned}$$

由于

$$e^TPB\text{sgr}(e^TPB) = \|e^TPB\|,$$

所以将(11)式代入后有

$$\begin{aligned} dV(e)/dt &\leq -e^TQe - (k_0 - 2W)\|e^TPB\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2 - (k_0 - 2W)\|e^TPB\|, \end{aligned}$$

式中的 $\lambda_{\min}(Q)$ 是正定矩阵 Q 的最小特征值.

因此,当选择 $k_0 \geq 2W$ 时 $dV(e)/dt$ 为一负定函数,于是得到(13)式的平衡点 $e=0$ 是大范围渐近稳定的结论.

注 1) 由于(13)式中的 (A, B) 能控,根据最优控制理论的结果,对给定的对称正定阵 Q, R ,总可以通过(15)式求出唯一正定对称阵 P .

2) 虽然控制器 u 及控制系数 $g(x)$ 中含有状态变量 x ,但由于其是受控系统的变量,因而是可得到的.控制器中仅使用了参考信号及其导数.这对混沌同步用于保密通信特别重要,因为这可以节省用于传送发信端状态变量的信道资源.

3) 在控制能量允许的条件下,调节 Q, k_0 的大小,可以调节同步的快慢.在相同的条件下,当增加 $\lambda_{\min}(Q)$ 和 k_0 时,可以缩短同步时间.

4) 粗看起来假设 1 与假设 2 中的条件比较苛刻,但对于连续时间混沌系统和可以任意选择的 $g(x)$ 来讲,却又是合理的.因为混沌系统是耗散系统,其相点总在相空间一定的区域内游荡.

5) 定理 1 只能保证(13)式的平衡点 $e=0$ 大范围渐近稳定,即 $y(t)$ 及其 r 阶导数最终同步于 $\hat{y}(t)$ 及其 r 阶导数,并不能保证 $x(t)$ 完全同步于 $\hat{x}(t)$.

6) 由于假设 1 的存在,当 $r < n$ 时(9)式的存在并不影响(5)式的同步结果,但同时也是造成 $x(t)$ 不完全同步于 $\hat{x}(t)$ 的原因之一.

4 计算机模拟结果

4.1 Lorenz 系统同步控制

给定混沌 Lorenz 系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\hat{x}_1 + \alpha\hat{x}_2 \\ -\hat{x}_1\hat{x}_3 + \beta\hat{x}_1 - \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 - \gamma\hat{x}_3 \end{bmatrix},$$

取 $\alpha=10, \gamma=8/3, \beta=28$ 时,上式处于混沌状态.当以 \hat{x}_1 或 \hat{x}_2 作为输出时,可以使用线性耦合法或 Pecora-Carroll 法实现同步;当以 \hat{x}_3 作为输出时,线性耦合或 Pecora-Carroll 法都不能实现同步.现采用(14)式作为控制器,来同步两个 Lorenz 系统的 \hat{x}_3 和 x_3 .

设受控系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1x_1 + \alpha_1x_2 \\ -x_1x_3 + \beta_1x_1 - x_2 \\ x_1x_2 - \gamma_1x_3 \end{bmatrix} + g(x)u, \quad (17)$$

$$y = h(x) = x_3. \quad (18)$$

可以验证,当取 $g(x) = [x_2 \quad x_1 \quad 0]^T$ 时,(17)和(18)式有相对阶 $r=2$.且 $L_gL^2h(x) = x_1^2 +$

$x_2^2 \neq 0, \forall x \neq 0$. 同时取

$$R = I, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

可求得

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

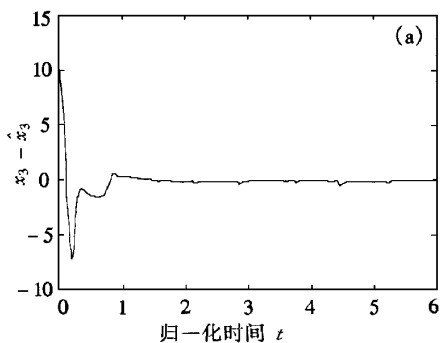
于是可求得控制器为

$$u = \frac{-1}{\chi(x_1^2 + x_2^2)}(e_1 + 2e_2 + k_0 \operatorname{sgn}(e_1 + 2e_2)),$$

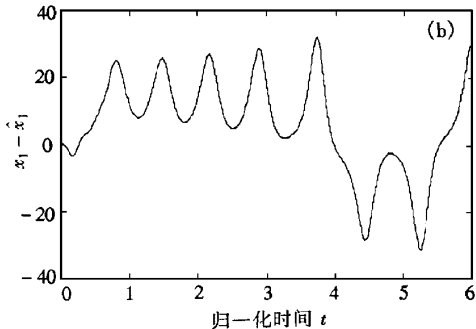
其中

$$e = \begin{bmatrix} z_1^1 - \hat{x}_3 \\ z_2^1 - \hat{x}_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - \hat{x}_3 \\ x_1 x_2 - \gamma_1 x_3 - \hat{x}_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

图 1 分别给出了 $k_0=200, \alpha_1=\alpha, \beta_1=\beta, \gamma_1=\gamma$ 时 $e_1=x_3-\hat{x}_3$ 及 $x_1-\hat{x}_1$ 随时间变化的结果. 从图 1 中可以看出, x_3 与 \hat{x}_3 实现了同步, 但 x_1 并没



(a) $(x_3 - \hat{x}_3) - t$ 关系曲线



(b) $(x_1 - \hat{x}_1) - t$ 关系曲线

图 1 $k_0=200, \hat{x}(0)=(5, 10, 8), x(0)=(5.1, 10.3, 18)$ 对应的混沌同步误差图

有同步于 \hat{x}_1 , 这在注 5) 中已作了说明. 图 2 给出 $k_0=400, \alpha_1=\alpha, \beta_1=\beta, \gamma_1=\gamma$ 时的结果, 将其与图 1 (a) 相对比后可以看出, 同等条件下 k_0 大时有较快的同步速度. 图 3 则给出了 $k_0=500, \alpha_1=\alpha, \beta_1=\beta,$

$\gamma_1=7/3$ 的情况. 图 3 的结果表明两个参数不相等的混沌系统的标量信号, 在本文设计的控制器控制下同样可实现同步, 只是有相对较长的同步过程.

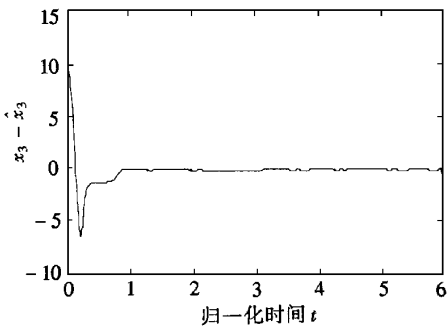


图 2 $(x_3 - \hat{x}_3) - t$ 关系曲线 $k_0=400$
 $\hat{x}(0)=(5, 10, 8), x(0)=(5.1, 10.3, 18)$

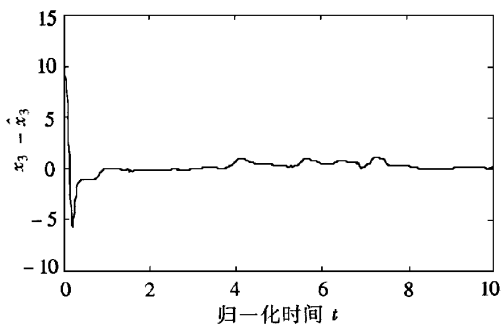


图 3 $(x_3 - \hat{x}_3) - t$ 关系曲线 $k_0=500$
 $\hat{x}(0)=(5, 10, 8), x(0)=(5.1, 10.3, 18)$

4.2 超混沌 Rössler 系统

有两个正 Lyapunov 指数的 4 阶超混沌 Rössler 系统方程为^[7]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.25x_2 + x_4 \\ 3.0 + x_1x_3 \\ -0.5x_3 + 0.05x_4 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

如选择状态变量 $h(x)=x_1$ 作为输出, $g(x)=[0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$, 可以验证, 受控系统有全局相对阶 $r=2$ 和

$$L_g L_f h(x) = -2 \neq 0.$$

再进一步取

$$R = I, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

有

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

于是

$$u = \frac{1}{4}(e_1 + 2e_2 + k_0 \operatorname{sgn}(e_1 + 2e_2)),$$

其中

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ -x_2 - x_3 - \hat{x}_1^{(1)} \end{bmatrix}.$$

当取 $k_0 = 15$ 时,对两个相同参数的系统实施控制,有图 4 所示的模拟结果.从结果中可以看到文中给出的控制策略也可以实现连续时间标量超混沌信号的同步.

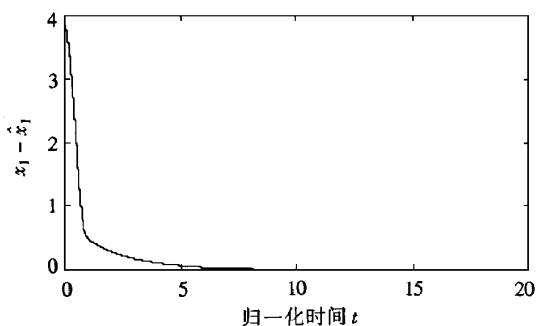


图4 $(x_1 - \hat{x}_1) - t$ 关系曲线 $k_0 = 15$, $\hat{x}(0) = (0.14, 0.8, 2.2, 0.8)$, $x(0) = (4.0, 0.6, 2.3, 0.7)$

5 结 论

本文的贡献在于给出了一种实现两个连续时间(超)混沌系统的标量混沌信号大范围渐近同步控制的控制策略.由于该控制策略是针对一般系统进行证明的,因此具有普遍适用性.该种同步控制方式下实现的控制结果,尤其对混沌应用于保密通信具有重要意义,因为仅传输标量信号可以节省宝贵的信道资源.后续要做的工作是对本文控制策略的鲁棒性及控制强度 k_0 的确定进行研究.

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **40**(1993), 626.
- [3] C. W. Wu, L. O. Chua, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **34**(1994), 979.
- [4] L. Kocarev, A. Shang, L. O. Chua, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **3**(1993), 479.
- [5] Jin-feng Gao, Xian-jue Luo, Xi-kui Ma *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1618 [in Chinese] 高峰、罗先觉、马西奎等, *物理学报*, **48**(1999), 1618.
- [6] X. F. Wang, Z. Q. Wang, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **45**(1998), 1101.
- [7] Giuseppe Grassi, Saverio Mascolo, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **44**(1997), 1011.
- [8] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.

A NONLINEAR FEEDBACK APPROACH FOR REALIZING ANY CONTINUOUS TIME SCALAR (HYPER) CHAOTIC SIGNAL SYNCHRONIZATION CONTROL *

GAO JIN-FENG LUO XIAN-JUE MA XI-KUI

(College of Electrical Engineering ,Xi 'an Jiaotong University ,Xi 'an 710049 ,China)

(Received 27 September 1999)

ABSTRACT

Based on the nonlinear control system theory and Lyapunov technique ,we have designed a nonlinear feedback controller for controlling the scalar output signal of a smooth(hyper) chaotic system to synchronize with any continuous time scalar(hyper) chaotic signal under some assumptions. The result ,which is global ,is rigorously proved by means of Lyapunov theory. An application to the synchronization of two(hyper) chaotic systems is presented.

PACC : 0545

* Project supported by the Doctorate Foundation of Xi 'an Jiaotong University ,China(Grant No. DFXJU1999-15).