

# 周期驱动的一维台球模型的量子扩散特性

陈贺胜

(中国科学技术大学天文与应用物理系, 合肥 230026)

(1999 年 10 月 10 日收到)

经典的一维台球模型(1D-KBM)是一个不连续的哈密顿系统, 一种由不连续所导致的新型随机网结构存在于 1D-KBM 的相空间中, 曾对其经典的扩散特性作过深入的探讨。就 1D-KBM 的量子扩散特性作了进一步的讨论, 通过与经典扩散特性的对比, 发现了经典扩散特性与量子扩散特性之间存在着一定的联系, 而更多的量子系统所特有的特性也被揭示出来, 特别是参数  $\alpha$  分别处于区间  $[0, \pi/2]$  和  $[-\pi/2, 0]$  上时系统所表现出来的完全不同的演化特性。

PACC : 0545

## 1 引言

在近来的物理学发展中, 由于对一类像碰撞等实际物理问题研究, 对不连续的强非线性系统的讨论已经成为非线性物理学的热点。一些很简单的物理系统, 由于加入了简单的不连续机制, 从而产生了很多奇异的特性。本文所讨论的模型就是一个受约束的周期撞击转子(KRM)。我们曾对其经典动力学特性进行过讨论<sup>[1]</sup>, 发现了一类由不连续所导致的新型随机网结构, 这引起了我们极大的兴趣。在本文中讨论该系统的量子力学扩散特性。

## 2 一维台球模型(1D-KBM)及其经典扩散特性

1D-KBM 的哈密顿函数为<sup>[1]</sup>

$$H = \frac{p^2}{2M} + k \cos(\theta - \alpha) \delta_T(t) + v(\theta),$$

$$v(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < \pi, \\ +\infty & \pi \leq \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (1)$$

这实际上是一个被约束在  $0 < \theta < \pi$  之间的 KRM。式中的  $p$  是转子的角动量,  $M$  是转子的转动惯量,  $k$  是作用强度参数,  $\theta$  是转动的角度,  $\alpha$  是外加势场的入射角,  $\delta_T(t)$  是周期为  $T$  的  $\delta$  函数序列。在系统作对称处理并引入无量纲参量  $I = pT/M$ ,  $K = kT/M$  后, 可以写出 1D-KBM 的不连续映射方程

$$I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta - S(\theta)\alpha) \quad \theta \neq 0, \pi,$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (2)$$

可以看出, 当  $\alpha = 0$  时, 系统演变为标准的 KRM。

在对该模型的研究中最重要的是发现了一类由不连续所导致的随机网结构, 这种随机网结构在产生的机理以及动力学行为上与传统随机网不同, 这也使得一些传统的手段无法用来分析这种特殊的结构。由于随机网的存在, 使得 1D-KBM 的相空间在任何参数空间中都是全空间扩散的, 对该模型的研究也就主要着眼于对其统计扩散性质的研究上。

对于经典 1D-KBM, 当  $K \subset (0, 1)$  时, 数值计算给出了系统沿  $I$  方向的扩散系数为

$$D(K, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_n - p_0)^2}{n} = D_0(\alpha)K^{f(\alpha)}, \quad (3)$$

函数  $D_0(\alpha)$  和  $f(\alpha)$  的具体数值结果如图 1, 随着  $|\alpha| \rightarrow \pi/2$ ,  $f \rightarrow 5/2$ , 而当  $|\alpha| \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 3/2$ .  $D_0 = C \sin^2(\alpha)$ , 当  $\alpha \subset [-\pi/2, 0)$ ,  $C \approx 0.4$ ; 当  $\alpha \subset (0, \pi/2]$ ,  $C \approx 0.036$ . 而当  $K \gg K_c$ , 利用无规相位假设<sup>[3]</sup>, 容易得  $D(K, \alpha) \approx K^2/2$ .

鉴于  $\alpha \subset [0, \pi/2]$  和  $\alpha \subset [-\pi/2, 0)$  两种参数情形下相空间中随机网结构以及扩散特性上存在的巨大差异, 因而, 我们将在参数区间  $\alpha \subset [0, \pi/2)$  和  $\alpha \subset [-\pi/2, 0)$  分别讨论 1D-KBM 的量子扩散特性。

## 3 量子局域化长度和 Husimi 分布

对于周期驱动系统, Casati 等<sup>[2]</sup>作了详细地研究, 对于这类系统的量子化描述可以在驱动周期内

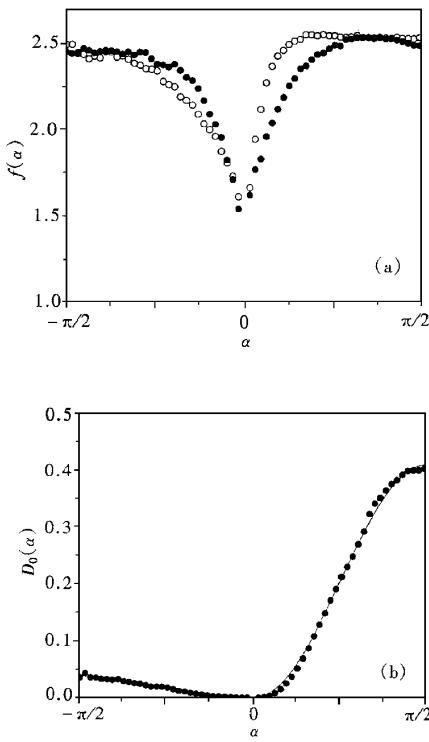


图1 1D-KBM 在不同参数下的经典相空间结构  
(a)  $\alpha = 0.4, K = 0.2$  (b)  $\alpha = -0.4, K = 0.2$

采用么正时间演化算符加以描述,对于 1D-KBM 可以表述为

$$\hat{U}(T) = e^{-iT\hat{p}^2/2} e^{-ik\cos(\theta-\alpha)}. \quad (4)$$

为了表述和计算的方便,普朗克常数  $\hbar$  已被取为单位 1. 这样,量子一维台球模型定义为

$$\psi_{n+1}(\theta) = \hat{U}(T)\psi_n(\theta). \quad (5)$$

在能量本征空间中,  $\hat{U}(T)$  可以表示为

$$U_{mn} = \frac{1}{\pi} e^{-iE_0 T} \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin(n\theta) e^{-ik\cos(\theta-\alpha)} d\theta. \quad (6)$$

对于经典 1D-KBM 模型来说,其动力学特性只决定于参数  $K = kT$ ,而其量子动力学特性分别由参数  $T$  和  $k$  同时决定。(6)式的半经典极限为  $kT = \text{const}$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ . 对(8)式的计算说明(6)式的非零矩阵元都分布于延对角  $U_{nn}$  的一个宽度约为  $2k$  带子中,而其他矩阵元按远离对角线的距离指数衰减,这个特点与 KRM 演化矩阵的特点非常相似.

为了方便与经典 1D-KBM 的动力学性质进行对比,通过将波函数向相干态空间投影,任意波函数  $\psi$  被构造成显含动量  $p$  和坐标  $\theta$  的粗粒化 Husimi

### 分布函数<sup>[3]</sup>

$$\rho(\theta_0, p_0) = \frac{1}{2\pi} |\psi(\alpha)|^2, \quad (7)$$

$|\alpha\rangle$  是相干态波函数,这样我们就可以在相空间中表示量子态的分布. 在能量本征空间中,Husimi 分布可以很容易表述为

$$\rho(\theta_0, p_0) = \left( \frac{\omega}{\pi^5} \right)^{1/2} \left| \sum_m C_m \cdot \int_0^\pi \sin(m\theta) e^{-\frac{\omega}{2}(\theta-\theta_0)^2} e^{ip_0 d\theta} \right|^2. \quad (8)$$

这里  $\sqrt{2/\pi} \sin(m\theta)$  是无外场作用时的能量本征函数,  $\{C_m | m = 1, 2, \dots\}$  是波函数  $|\psi\rangle$  在能量本征空间中的矢量表述.

一个经典混沌系统所对应的量子系统在长时间的演化后一般并不会表现为类似经典混沌的扩散,在演化时间超过一定的时间尺度后,量子系统的扩散将会受到明显的抑制,这就是所谓的量子局域化,局域化的程度一般利用量子局域化长度加以定量地描述. 量子局域化长度的定义可以采用不同的定义方式,在这里,采用时间演化的方式将量子局域化长度  $l$  定义为<sup>[4]</sup>

$$l = \sqrt{\sum_m m^2 |C_m(t)|^2}, \quad (9)$$

$t$  表示对时间  $t$  求平均.

## 4 1D-KBM 的量子扩散特性

在经典情形下,当  $kT \gg 1$  时,1D-KBM 的特性与 KRM 基本是一致的;在量子情形下,当  $k < T$  时,在演化算符的作用下,能级间的跃迁极小,系统是强烈量子抑制的. 所以,在本文中,将主要讨论参数区间  $k \ll T, 1/T$  上的量子扩散特性.

我们定义系统在  $t$  时刻的能量期望值  $E(t)$  为

$$E(t) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \psi(\theta)^* \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sum_m m^2 |C_m(t)|^2. \quad (10)$$

由于约束的存在,系统在边界  $\theta=0$  和  $\theta=\pi$  是不连续的,在经典的情形下,相空间中的粒子当运动到边界处,会与弹性挡板发生碰撞,这导致了相空间中 KAM 环面的破裂,破裂的程度用参数  $\Delta = 2kT |\sin(\alpha)|$  加以表征. 破裂后的 KAM 环面构成了 Cantori 结构<sup>[4]</sup>,在量子情形下,如果 Cantori 间的隧

道尺度小于  $\hbar$ , Cantori 依然表现为完整的 KAM 环面。由此我们推断, 对于特定的参数  $\alpha$ , 当  $k$  很小时, 1D-KBM 的量子特性应该类似于 KRM, 这样, 用于分析 KRM 的半经典方法继续适用于 1D-KBM, 由此, 可以近似地写出这种情形下的量子局域化长度为<sup>[5]</sup>

$$l \simeq 2\sqrt{k/T}. \quad (11)$$

相反, 当  $k$  很大时, Cantori 间的隧道尺度将远大于  $\hbar$ , 波包就会通过这些隧道在有限的时间尺度内作类似于经典的扩散(即半经典扩散)。在研究 1D-KBM 的经典特性时我们已经得到了其经典扩散系数  $D_{cl}$ , 这样系统在作半经典扩散时的量子局域化长度应为<sup>[5]</sup>

$$l \simeq D_{cl}(K, \alpha)/2. \quad (12)$$

这样, 由(3)(11)和(12)式很容易得到系统向半经典扩散转变的临界参数  $k_b$  为

$$k_b \simeq \left( \frac{2T^2 - f(\alpha)}{D_0} \right)^{(\alpha)-\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

这里  $f(\alpha)$  是  $\alpha$  的函数, 可以看出,  $k_b$  是  $T$  和  $\alpha$  的函数。

我们选取一个初始波函数  $\psi_0$  为如下的高斯波包<sup>[6]</sup>,

$$\psi(\theta_0, p_0) = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{\omega}{2}(\theta-\theta_0)^2} e^{-ip_0\theta} e^{-ip_0p_0/2}, \quad (14)$$

这里  $(\theta_0, p_0)$  对应于波包在相空间中的中心位置, 波包在  $\theta$  和  $p$  方向上分布的宽度分别为  $\sqrt{1/2\omega}$  和  $\sqrt{\omega/2}$ , 该波包满足最小不确定性原理  $\Delta\theta\Delta p = \frac{1}{2}$ 。我们对高斯波包的长时间演化行为作了计算。在最初的演化过程中, 波包的行为与经典相空间中的单个粒子的演化类似, 当碰到边界后波包会被弹性挡板反弹回来。经过长时间的演化, 波包在相空间中的分布不断扩散, 直到演化的时间大于某个时间尺度  $t^*$  后, 由于纯粹的量子局域化效应, 这种扩散过程才趋于停止, 这时, 波包在动量空间中分布的宽度也就是我们所定义的量子局域化长度。

首先, 我们先来看一看系统在区间  $\alpha \in [0, \pi/2)$  上的演化特性。

按照(9)式, 我们计算了不同参数下的量子局域化长度以及波包在不同初始位置下的量子局域化长度(图2), 由图2中的(a)-(c)可以看出, 结果与我们的猜想基本上是吻合的;  $\alpha$  很小时, 转变参数  $k_b$

的值要远大于  $1/T$ , 所以在整个参数区间  $k \in [T, 1/T]$  上 1D-KBM 的量子局域化长度与 KRM 基本上是一致的; 当  $\alpha$  较大时, 由计算结果很容易看到 1D-KBM 的量子局域化在  $k = k_b$  处发生了转折,  $k_b$  与(13)式符合得很好。

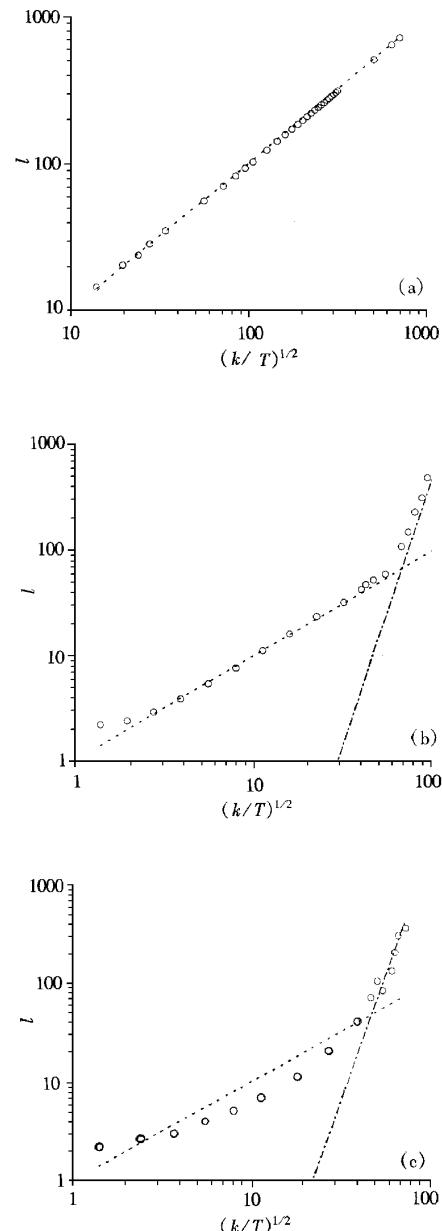


图2 在参数区间  $k \in [T, 1/T]$ , 当  $\alpha$  取不同参数时, 1D-KBM 的量子局域化长度随参数  $\sqrt{k/T}$  的变化。(a)  $\alpha = 0.01, T = 0.001$  (b)  $\alpha = 0.5, T = 0.01$  (c)  $\alpha = \pi/2, T = 0.01$ 。其中的点线为半经典估计值  $l = \sqrt{k/T}$ , 点划线为  $l = 0.4 \sin^2(\alpha) k^2 / \sqrt{kT}$

为了进一步说明系统的量子扩散特性, 当  $k <$

$k_b$  时,我们计算了处于基态的波包长时间演化后的平均 Husimi 分布。结果说明,虽然由于不连续导致了经典相空间中 KAM 环面的完全破裂,但在量子系统中,当不连续的程度有限时,波包长时间演化后的平均 Husimi 分布都集中分布于某些经典 KAM 环面的附近。当  $k < k_b$  时,主共振区内的波包被抑制在主共振区内作类似于准周期的运动;随着扰动强度  $k$  的增大并超过临界值  $k_b$ ,处于主共振区内的波包的演化将突破主共振区,系统的演化特性演变为半经典扩散。

现在再来看一看系统在区间  $\alpha \in [-\pi/2, 0]$  上的演化特性。

对于参数区间  $\alpha \in [-\pi/2, 0]$ ,由于不连续所产生的隐蔽作用,相空间中的双曲不动点( $\theta = \alpha, I = 0$ )被屏蔽掉了,而椭圆不动点( $\theta = \pi + \alpha, I = 0$ )残存了下来,残存下来的椭圆不动点构成了相空间中最稳定的周期点。随着  $kT$  增大直到  $kT > 4$ ,不动点周围残存下来的规则区域内的 KAM 环面从外向里逐个破裂直到椭圆不动点消失,而椭圆不动点所在规则区的尺度近似为

$$\Delta I \simeq \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{2k}{T}}, \quad (15)$$

我们将这个区域称为次主共振区。在经典情形下,次主共振区的存在直接导致了 1D-KBM 在参数区间  $\alpha \in [-\pi/2, 0]$  和  $\alpha \in (0, \pi/2]$  上完全不同的动力学特性,两种情形下的随机网结构存在着明显的差异,特别是当  $|\alpha| \rightarrow \pi/2$  时。量子情形下,在次主共振区内,波包长时间演化后的平均 Husimi 分布类似于经典 KAM 环面结构(图 3),分布的高起位于初始位置所在经典 KAM 环面上。当波包的初始位置位于不动点附近时,我们计算了波包长时间演化的量子局域化长度(图 4)。与前一种情形不同的是,在整个区间  $k \in [T, 1/T]$  内,系统没有出现规则运动向半经典量子扩散的明显过渡,量子局域化长度远小于由半经典方法得到的估计值。这个结果说明,经典规则区内的 KAM 环面对量子系统的扩散依然存在着强烈地抑制作用。

## 5 结 论

通过对 1D-KBM 量子局域化长度的计算,可以得出结论,经典的不连续系统在量子情形下,当不连续的程度有限时,经典下的不连续特性并不能在量

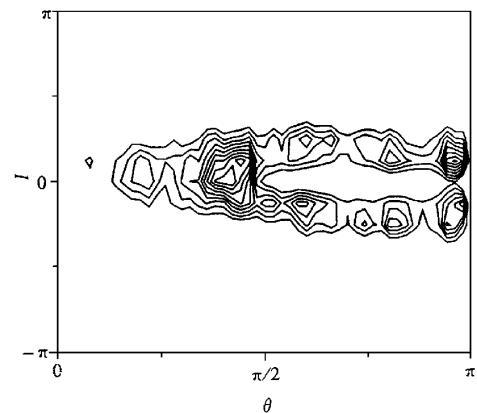


图 3 当  $\alpha = -0.8, k = 30, T = 0.01$ , 波包长时间演化后的平均 Husimi 分布的等高图

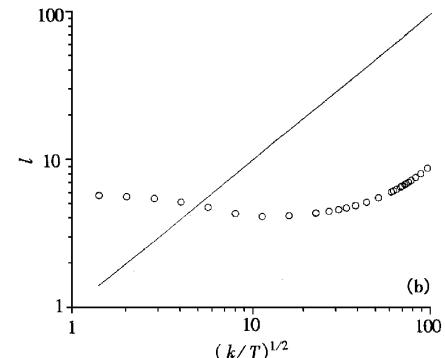
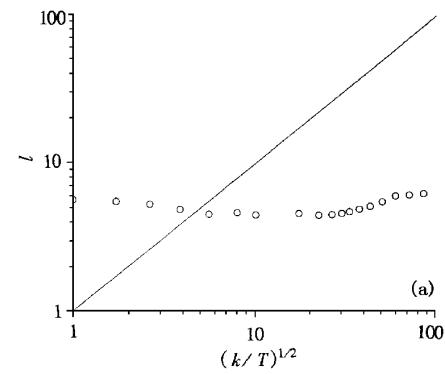


图 4 当  $\alpha \in [-\pi/2, 0], 1D-KBM$  的量子局域化长度随参数  $\sqrt{k/T}$  的变化 (a)  $\alpha = -\pi/2, T = 0.01$ ; (b)  $\alpha = -0.5, T = 0.01$

子情形下明显地表现出来,量子效应会在一定程度上抹平相空间上的不连续带隙。另外,从我们的计算可以看出,虽然 1D-KBM 演化算符的特性与 KRM 极为相似,但是它们在特定参数区间内的量子动力学特性存在着很大的差异。通过对这类系统的研究,

我们有可能对不连续系统经典的以及量子的动力学特性作出更为系统的认识. 在本文中, 主要从时间演化的角度讨论了 1D-KBM 的量子扩散特性, 而没有从本征态及准能量谱的角度更进一步地讨论其动力学特性, 更进一步的工作还有待继续.

我要衷心地感谢我的导师顾雁教授所给予的指导.

- [ 1 ] H. S. Chen J. Wang ,Y. Gu ,*Chin. Phys. Lett.* ,**17**( 2000 ) 85.
- [ 2 ] G. Casati ,B. V. Chirikov ,F. M. Izrailev J. Ford ed. by G. Cacai and J. Ford ( Springer-Verlag , New York , 1979 ) p. 334.
- [ 3 ] Y. Gu ,*Quantum Chaos* ( Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House , Shanghai , 1996 ), p. 66( in Chinese ) 顾雁, 量子混沌, 上海科学教育出版社, 1996 p. 66. ]
- [ 4 ] F. Borgnoni ,*Phys. Rev. Lett.* ,**80**( 1998 ) A653.
- [ 5 ] F. M. Izrailev ,*Phys. Rep.* ,**19**( 1990 ) 299.
- [ 6 ] S. J. Chang K. J. Shi ,*Phys. Rev.* ,**A34**( 1986 ) 97.

## THE QUANTUM TRANSPORT PROPERTIES OF A 1-DIMENSIONAL KICKED BILLIARDS MODEL

CHEN HE-SHENG

( Department of Astronomy and Applied Physics , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China )

( Received 10 October 1999 )

### ABSTRACT

A new kind of stochastic web due to discontinuity was found in classical 1-dimensional kicked billiards model ( 1D-KBM ) which is a discontinuous Hamiltonian system. Its classical diffusion characteristics have been discussed in our previous article. The quantum diffusion characteristics of 1D-KBM was studied, the interesting thing is that it was found to be related with the classical diffusion characteristics, and some more special characteristics for the quantum case were also pointed out, especially those present different properties for  $\alpha \in [0, \pi/2]$  and  $\alpha \in [-\pi/2, 0]$ .

PACC : 0545