

# 轴对称激光系统的静态和旋转横向斑图 \*

于兴启 汪凯戈

(北京师范大学物理系 北京 100875)

(1999 年 9 月 30 日收到)

讨论在好腔近似下轴对称激光系统中静态和旋转横向斑图的主要结构和特征. 数值模拟结果还证实了形成这些斑图的模式强度和频率满足合作频率移动律.

PACC : 4260 ; 4754

## 1 引 言

最近的研究表明, 在非线性光学系统中光场可以呈现各种静态和时空演化的横向斑图<sup>[1]</sup>. 这一现象完全可以同流体力学、非线性化学反应和生物学中发现的耗散结构现象相类比, 而引起广泛的关注. 以均匀展宽的两能级原了为介质的轴对称激光系统是最典型的激光模型, 它可以用含有横向空间变量的麦克斯韦尔-布洛赫(M-B)方程组来描述. 对这一方程组的理论和数值研究表明该系统可以出现形形色色的稳定和不稳定的横向斑图, 并同实验观察基本一致<sup>[2-4]</sup>.

数值求解完整的 M-B 方程计算量很大, 很难做到扫描参数去观测斑图的演化和转换. 本文考虑腔损耗远小于原子衰变的好腔条件(通常称为 A 类激光器), 将原子变量绝热消去, 使 M-B 方程简化为激光场模满足的非线性方程组. 我们用五阶龙格-库塔法数值求解, 通过扫描参数模拟观测激光斑图的演化过程.

## 2 模 型

本文所描述的模型如图 1 所示. 激光环形腔由曲率半径为  $R_0$ 、透射率为  $T$  的两个球面镜 1 和 2, 两个全反射平面镜 3 和 4 组成. 腔内有长度为  $L_A$ 、体积为  $V$  的均匀展宽的两能级原子组成的增益介质. 原子的跃迁频率为  $\omega_A$ . 环形腔的总长度为  $\Lambda$ , 两球面镜之间的距离为  $L$ . 描述该激光系统动力学的

M-B 方程为<sup>[2]</sup>

$$\frac{df_{p,l}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{\kappa} \left[ (1 - i\Delta + iq\alpha)f_{p,l}(\tau) - 2C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho A_{p,l}^*(\rho, \omega) P(\rho, \varphi, \tau) \right], \quad (1a)$$

$$\frac{\partial P(\rho, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = F(\rho, \varphi, \tau) D(\rho, \varphi, \tau) - (1 + i\Delta) P(\rho, \varphi, \tau), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial D(\rho, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = -\tilde{\gamma} \left[ \operatorname{Re} F^*(\rho, \varphi, \tau) P(\rho, \varphi, \tau) + D(\rho, \varphi, \tau) - \chi(\rho) \right]. \quad (1c)$$

其中  $F(\rho, \varphi, \tau)$ ,  $P(\rho, \varphi, \tau)$  和  $D(\rho, \varphi, \tau)$  分别为含有空间极坐标  $(\rho, \varphi)$  的电场、原子极化强度和布居的无量纲慢变包络.  $\tau = \gamma_\perp t$ ,  $\gamma_\perp$  为原子纵向弛豫率,  $\tilde{\kappa}$  和  $\tilde{\gamma}$  分别为腔损耗  $\kappa$  和原了横向弛豫率  $\gamma_\parallel$  对  $\gamma_\perp$  之比;  $\Delta$  为原子失谐,  $\alpha$  为相邻横模族之间的频率间隔,  $2C$  为增益参数. 电场包络可用高斯-拉盖尔函数展开<sup>[2]</sup>

$$F(\rho, \varphi, \tau) = \sum_{p,l} A_{p,l}(\rho, \varphi) f_{p,l}(\tau), \quad (2)$$

$$A_{p,l}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2\rho^2)^{\frac{|l|}{2}} \left[ \frac{\rho!}{(p+|l|)!} \right]^{1/2} L_p^{|l|}(2\rho^2) \exp(-\rho^2) \exp(il\varphi), \quad (3)$$

其中  $p=0, 1, 2, \dots$ ,  $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  为横模指标,  $L_p^{|l|}$  是拉盖尔多项式. 定义横模族指标  $q=2p+|l|$ , 相同的横模属于频率简并的同一横模族, 其中  $l=0$  为轴对称模,  $l \neq 0$  为非轴对称模. 设原子介质

\* 国家自然科学基金(批准号 69278013 和 19774013)资助的课题.

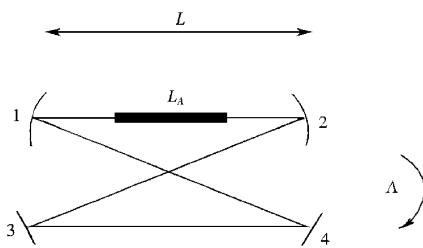


图 1 轴对称环形激光系统示意图

的平衡布居反转分布  $\chi(\rho)$  为高斯型 ,

$$\chi(\rho) = \exp(-2\rho^2/\psi^2), \quad (4)$$

其中  $\psi$  为布居分布的归一化宽度 . 在好腔近似下 ( $\tilde{\kappa} \ll 1$ ) 原子变量可以绝热消去 , 再采用立方近似得到激光模式振幅方程 ,

$$\frac{df_{p,l}}{dt} = -(1 + iqa)f_{p,l} + 2C \sum_{p',l'} b_{p,l,p',l'} f_{p',l'} - 2C \cdot \sum_{p',l',p'',l'',p''',l'''} \Gamma_{p,l,p',l',p'',l'',p''',l'''} f_{p',l'} f_{p'',l''}^* f_{p''',l'''}, \quad (5)$$

其中 ,  $\tau' = \tilde{\kappa} \gamma_{\perp} t = \kappa t$  耦合系数

$$b_{p,l,p',l'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho A_{p,l}(\rho, \omega) A_{p',l'}^*(\rho, \varphi) \chi(\rho), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{p,l,p',l',p'',l'',p''',l'''} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho A_{p,l}^*(\rho, \omega) \\ &\cdot A_{p',l'}(\rho, \varphi) A_{p'',l''}^*(\rho, \varphi) \\ &\cdot A_{p''',l'''}(\rho, \varphi) \chi(\rho). \end{aligned} \quad (7)$$

本文仅讨论共振情况 , 在方程中令  $\Delta = 0$ .

### 3 数值结果

我们用五阶龙格-库塔法求解方程组 (5) , 只考虑  $q = 0-3$  前四个横模族共十个模被激发的情况 . 因为在实际装置中 , 由于球面镜和激活介质尺寸的限制以及腔内光阑元件产生较大的衍射损耗 , 高阶横模族 ( 大  $q$  值 ) 不具有动力学意义 . 为使立方近似成立 , 抽运参数  $2C$  应选择在近阈值处 .

通过分析解的结果我们发现 , 当布居分布宽度  $\psi$  及相邻横模族之间的频率间隔  $a$  变化时 , 方程组的解可分为二类 , 每一类有四种斑图结构 .

第一类是静态斑图 , 即斑图的强度分布不随时间变化 . 四种静态斑图是 :  $S1$  由  $(0,0)$  模、  $(1,0)$  模组成 , 但  $(1,0)$  模强度实际上可以忽略 , 这是典型的单 ( 纵 ) 模解 ;  $S2$  由  $(0,-1)$  模和  $(1,-1)$  模 ( 或  $(0,1)$  模和  $(1,1)$  模 ) 组成 , 形成绕光轴的一个亮环和次亮环 ;

$S3$  由  $q=0$  和  $q=2$  两个横模族共四个模组成 , 其中  $(0,2)$  和  $(0,-2)$  模有完全相同的复振幅 , 形成具有四个光涡旋的“豹斑”<sup>[3]</sup>;  $S4$  由  $(0,0)$  模、  $(1,0)$  模、  $(0,3)$  模、  $(0,-3)$  模组成 , 后两个模也有相同的复振幅 , 斑图呈六角形结构 , 有三个光涡旋 .

第二类是旋转斑图 , 斑图强度分布绕光轴以固定频率  $\Omega$  旋转<sup>[5,6]</sup> ( 可以有两种旋转方向 , 取决于初始条件 ). 四种旋转斑图是 :  $R1$  与  $S3$  由相同模组成 , 但  $(0,2)$  和  $(0,-2)$  模的复振幅不相同 , 形成的斑图与  $S3$  大不相同 , 只有两个光涡旋 ;  $R2$  与  $S4$  由相同的模组成 , 但  $(0,3)$  模和  $(0,-3)$  模振幅不相同 , 斑图呈等边三角形 , 有三个光涡旋 ;  $R3$  由  $q=1$  和  $q=3$  两个横模族共六个模组成 , 有九个光涡旋 ;  $R4$  由  $q=0-3$  四个横模族共十个模组成 , 斑图呈不对称分布 , 有两个光涡旋 . 在这四种旋转解中 ,  $R4$  的旋转频率很小 , 并且随着  $a$  的增加而减小 .

图 2 为这八种斑图的三维强度分布、密度分布和等强度周线分布 .

通过扫描参数  $a$  可观察斑图发生转化的分岔图 , 当  $\psi$  较小例如  $\psi=0.5$  时 , 无论  $a$  怎么变化 , 只有  $S1$  一种斑图出现 , 实际上为单模激发 . 当  $\psi=3.0, 10.0$  及无穷大时其分岔行为见图 3(a)(b) 和 (c) , 其中箭头向右 ( 左 ) 表示  $a$  增加 ( 减小 ) , 图中的数值表示斑图发生转化时  $a$  的值 . 由图 3 可以看出 , 随着增益分布宽度的增大 , 使高阶模易于激发 , 而形成较多的斑图 . 另一方面 , 当  $a$  减少时 , 横模的频率间隔变小 , 增益谱可以覆盖更多的横模 , 也使斑图的种类增加 .

对于静态斑图 , 形成斑图的各模式的频率锁定工作在同一频率 , 满足合作频率锁定律<sup>[7]</sup> . 本模型中静态斑图的主要特征同以前的文献报道一致<sup>[3]</sup> . 与静态斑图相比较 , 当斑图强度分布绕光轴以固定频率旋转时 , 从现象上来分析属于一种时空周期行为 , 但本质上是“平庸”的周期解 . 因为被激发的横模的强度和频率均不随时间变化 , 与静态斑图相同属稳定多模工作 . 与静态斑图不同的是 , 所有激发模式不再锁定在同一频率 , 而形成等间隔分布 . 斑图的旋转是模式指数  $l$  不同的模之间产生“频率拍”的结果 . 文献 [6] 已经指出 , 当斑图绕光轴以固定频率  $\Omega$  旋转时 , 激发横模的频率  $\omega_{pl}$  满足

$$\omega_{pl} = \omega_0 + l\Omega, \quad (8)$$

其中  $\omega_0$  是对称模 ( $l=0$ ) 的工作频率 . 本模型中的  $R1-R4$  斑图均满足上式 , 并根据此式可计算出斑

图的旋转频率  $\Omega$ .

最近,在 M-B 方程描述的激光系统中,理论上预言了存在一个普遍的合作频率移动律<sup>[8,9]</sup>,描述激光模式的频率和强度之间存在确定的合作关系.

它可将 Lugiato 等发现的合作频率锁定律<sup>[7]</sup>包括在内.它的表述是,在实现稳定多模工作时,激光模的工作频率  $\omega_i$  和强度  $|f_i|^2$  满足

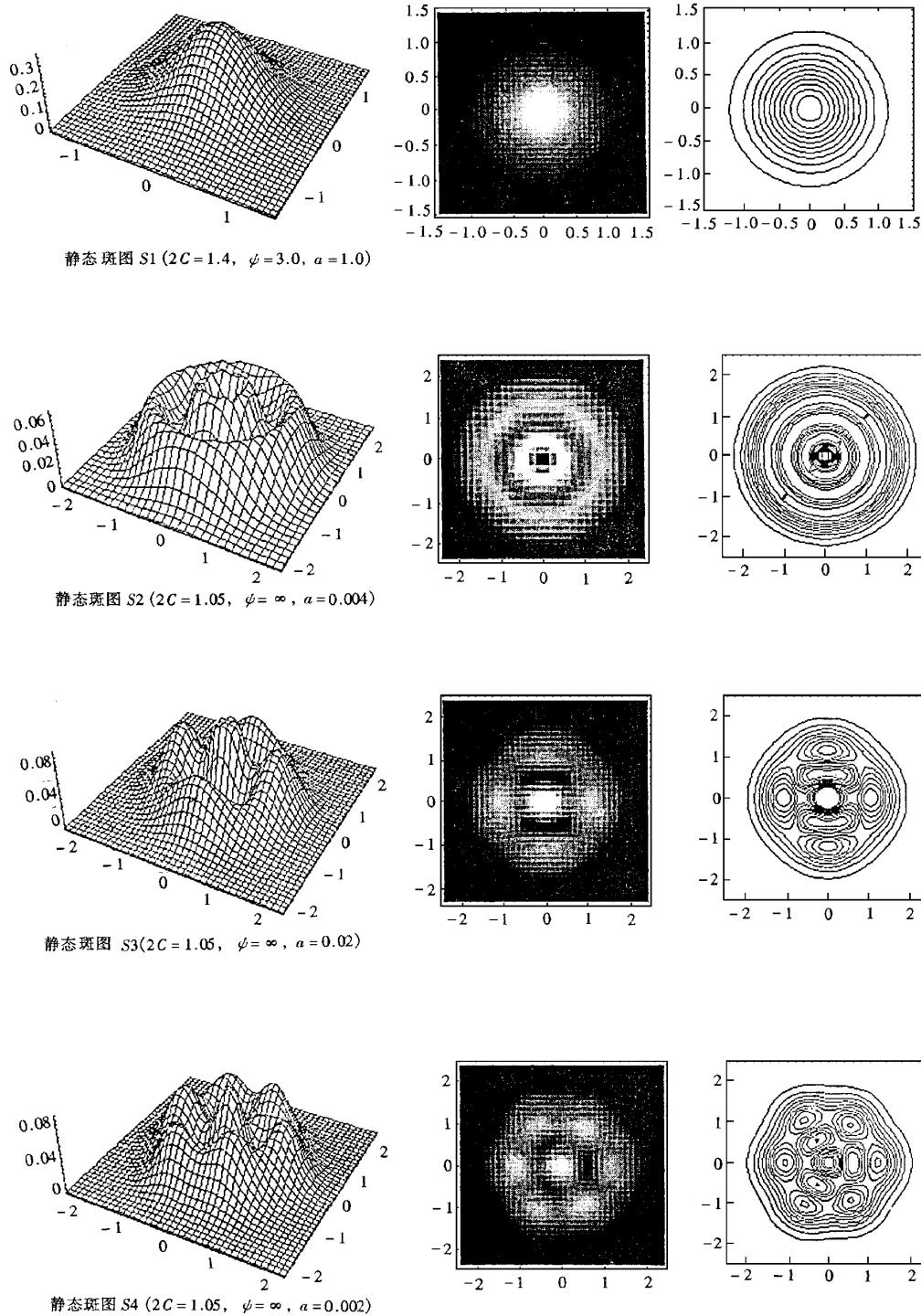


图 2

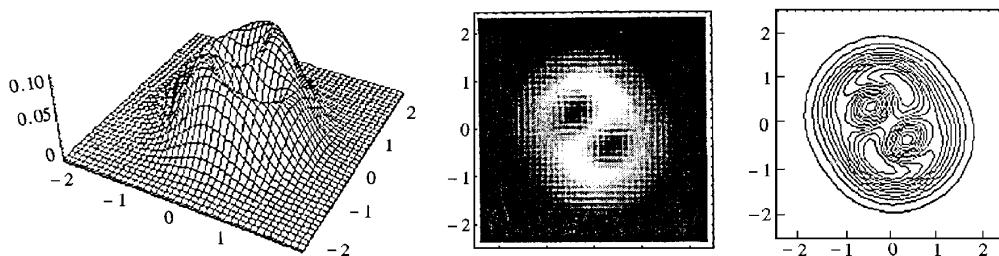
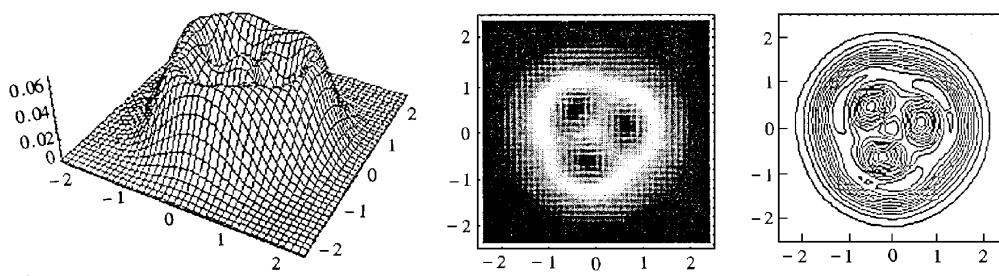
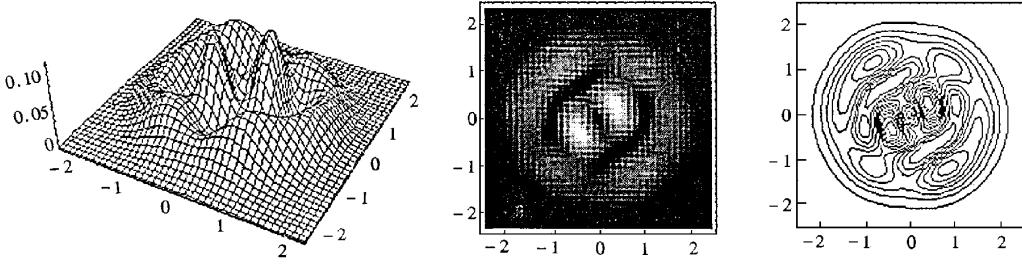
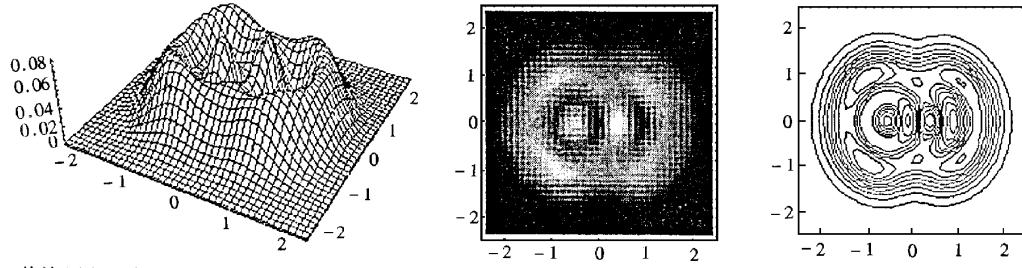
旋转斑图  $R1 (2C = 1.05, \psi = \infty, a = 0.004, \Omega = 0.0030)$ 旋转斑图  $R2 (2C = 1.1, \psi = 10.0, a = 0.02, \Omega = 0.0087)$ 旋转斑图  $R3 (2C = 1.05, \psi = \infty, a = 0.03, \Omega = 0.0023)$ 旋转斑图  $R4 (2C = 1.05, \psi = \infty, a = 0.002, \Omega = 0.00063)$ 

图 2 静态和旋转横向斑图的强度分布三维图,密度图和等高线图

$$\sum_i (\omega_i - \bar{\omega}_i) |f_i|^2 = 0, \quad (9) \quad (2p + |l|)a = qa.$$

其中  $\bar{\omega}_i$  是腔模牵引频率. 根据模式牵引公式<sup>[3]</sup>, 在好腔近似下, 该牵引频率十分接近腔模频率  $\omega_q$  =

在本模型中虽然对 M-B 方程作了简化, 数值结果表明, 合作频率移动律仍然严格成立. 图 4 为当  $\psi$  为无穷大时, 在斑图  $R3$  随  $a$  演化的过程中, 对(9)

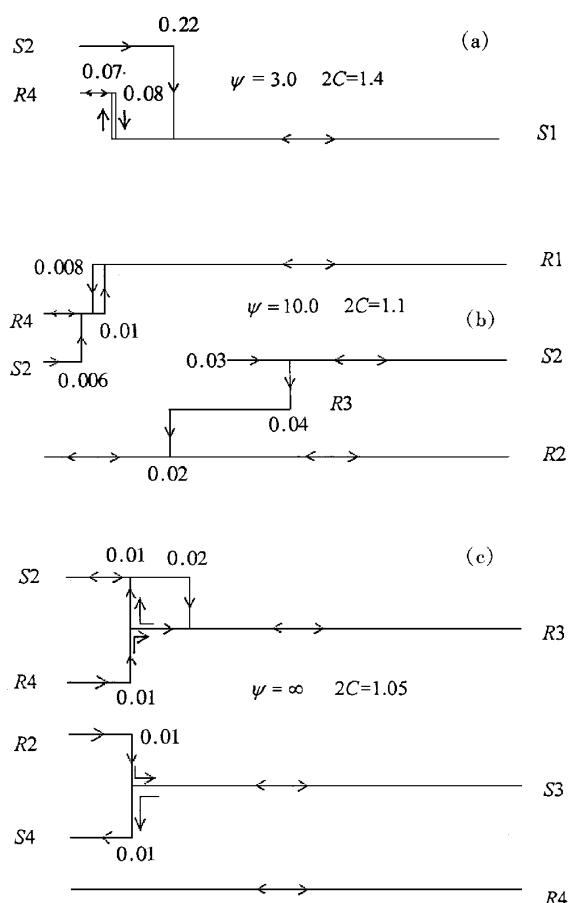


图 3 不同布居宽度时的斑图分岔图 (a)  $\psi = 3.0$ ,  $2C = 1.4$ ; (b)  $\psi = 10.0$ ,  $2C = 1.1$ ; (c)  $\psi = \infty$ ,  $2C = 1.05$

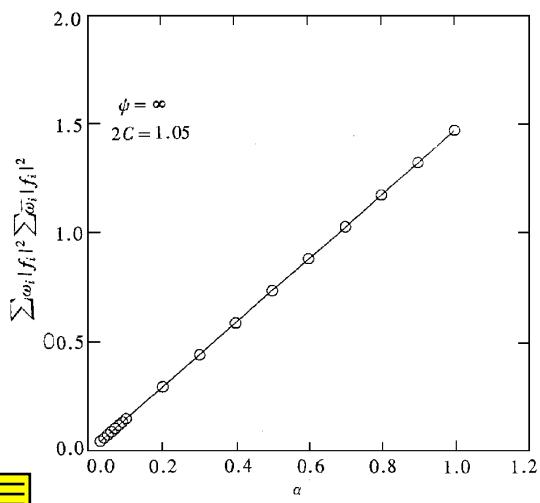


图 4 旋转斑图  $R_3$  随  $a$  演化过程中满足合作频率移动律. 实线(圆圈)表示腔模频率(模式工作频率)与模式强度乘积的总和

式的验证. 图中实线表示  $\sum_i \omega_i |f_i|^2$ , 圆点表示  $\sum_i |\omega_i| |f_i|^2$ , 两者完全重合.

合作频率移动律反映了激光稳定工作时模谱分布的基本规律: 1) 强激光模应十分接近其模式牵引频率(在本模型中为腔模频率); 2) 以强度为权重, 激发模工作频率对牵引频率偏离的代数和为零. 图 5 为斑图  $R_1$  的模谱, 强激光模( $0, 2$ )在其腔频  $2a$  处激发, 基本上不发生移动. 两个对称模( $0, 0$ )和( $1, 0$ )分别从其腔频  $0$  和  $2a$  处移到  $\omega_0$  处, 从图可以看出, ( $0, 0$ )模右移和( $1, 0$ )模左移所扫的面积相等.

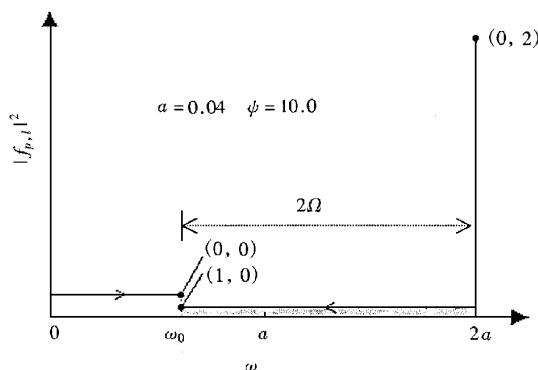


图 5 旋转斑图  $R_1$  的模谱图, 轴对称模( $0, 0$ )和( $1, 0$ )模锁定工作在同一频率  $\omega_0$ , 较强的非轴对称模( $0, 2$ )工作在其腔频  $2a$ , 两者相距为旋转频率  $\Omega$  的两倍

## 4 结 论

以均匀展宽两能级原子为介质的轴对称激光器在好腔近似下在近阈值处可以实现两类稳定的多模工作 静态斑图和旋转斑图. 前者各模振荡频率锁定在同一频率, 后者在  $l$  指数不同的模式之间形成频率拍. 当介质的增益分布较窄时, 只有轴对称单模振荡. 随着增益分布宽度的增加, 高阶非轴对称模开始激发, 实现轴对称破缺. 旋转斑图可以看作对轴对称破缺的一种补偿. 本模型的数值模拟结果还证实了激光稳定多模工作时, 模式强度和频率满足合作频率移动律.

- [1] F. Prati, M. Brambilla, L. A. Lugiato, *Rivista del Nuovo Cimento*, 17(3) (1994).
- [2] L. A. Lugiato, G. L. Oppo, J. R. Tredicce et al., *J. Opt. Soc. Am. (B)* 6 (1990), 1091.
- [3] M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato, *Phys. Rev.*, A43 (9) (1991), 5090.; M. Brambilla, L. A. Lugiato, V. Penna et al., *Phys. Rev.*, A43(9) (1991), 5114.
- [4] M. Brambilla, M. Cattaneo, L. A. Lugiato et al., *Phys. Rev.*, A49(2) (1994), 1427.; A. B. Coates, C. O. Weiss, C. Green et al., *Phys. Rev.*, A49(2) (1994), 1452.

- [5] F. Prati , L. Zucchetti , G. Molteni , *Phys. Rev.* , **A51**( 3 ) ( 1995 ) 4093.  
[6] K. G. Wang , Q. L. Pan , X. Q. Yu , *Phys. Rev.* , **A59**( 1 ) ( 1999 ) 803.  
[7] L. A. Lugiato , C. Oldano , L. M. Narducci , *J. Opt. Soc. Am. (B)* , **5** ( 1988 ) 879.  
[8] Kai-ge Wang , *Phys. Lett.* , **167** ( 1999 ) 510.  
[9] Kai-ge Wang , *Phys. Rev.* , **A60**( 1 ) ( 1999 ) 534.

## STATIONARY AND ROTATIONAL TRANSVERSE PATTERNS IN CYLINDRICALLY SYMMETRIC LASERS<sup>\*</sup>

YU XING-QI WANG KAI-GE

( Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China )

( Received 30 September 1999 )

### ABSTRACT

The main structures and features of stationary and rotational transverse patterns in the cylindrically symmetric lasers have been discussed in the good cavity limit. The numerical analogue shows that the intensities and the frequencies of the modes which form the patterns obey the cooperative frequency shift law.

PACC : 4260 ; 4754

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 69278013 , 19774013 ).