第 49 卷 第 5 期 2000 年 5 月
1000-3290/2000/49(05)/0969-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 49, No. 5, May, 2000
©2000 Chin. Phys. Soc.

超小金属微粒超导电性的能级统计*

陈志谦[1)2)] 郑仁蓉[3)2)1)] 陈 洪[1)] 姚纯青[4)]

[1)](西南师范大学物理系,重庆 400715)

[2)](苏州大学物理系,苏州 215006)

[3)](上海师范大学物理系,上海 200234)

[4)](西南师范大学数学系,重庆 400715)

(1999 年 6 月 23 日收到;1999 年 10 月 24 日收到修改稿)

用平均场理论的自洽方程计算了随机矩阵理论中三种系综(Gauss Orthogonal Ensemble;Gauss Unitary Ensemble;Gauss Symplectic Ensemble)所对应的电子能级的奇/偶电子数分布对临界电子能级间距的影响,得到了在不同的自旋-轨道耦合和磁场中奇/偶电子数分布的临界电子能级间距的定量关系以及奇电子数的$\widetilde{\Delta}(0)$随平均能间距$< d^{\rm o} >$的变化.

PACC:7337;4255

1 引 言

BCS 超导理论对超导体的特性和行为作了较为完整而成功的描述.但是,这些超导样品的尺寸通常都比较大.有实验[1,2]表明,当试图描述尺寸较小的超导小粒子(岛)时,以往的理论便显示出不足.倘若岛的有效电容非常小,由于库仑相互作用阻碍电子对结的隧穿,因而岛上的电子数是固定的.Averin 和 Nazarov[3]指出,具有确定电子数 N 的超导岛的低温性质依赖于其电子数的奇偶性:当 N 为偶数时,所有电子均可配成对;当 N 为奇数时至少有一个电子即使在 $T=0$ 时也不能配对,因此它具有比偶数电子多出的能量,等于超导能隙 Δ.Golubev 和 Zaikin[4]及 Jankó,Smith 和 Ambegaokar[5]等分别在正则系综和巨正则系综中对小粒子(岛)的超导性质特别是电子数的奇偶性作了深入的分析,并对能隙 Δ 作出了修正.

近来,Black,Ralph 和 Tinkham (BRT)运用新的实验技术,成功地制成一种新的单电子三极管.在这种新装置中,其岛上单个 Al 粒子的体积(据估计其半径在 2.5—13 nm 间)远小于常规的单电子三级管(约小于 4 个数量级).BRT 用此装置测量了超小 Al 粒子中的超导性质,观测到能隙的存在[6,7].再次让人们认真考虑'超导体究竟可以有多小'这个理论问题.同时,能级上奇电子数与偶电子数的问题也再次提了出来.von Delft 等人[8]运用等能间距模型并考虑了电子数的奇偶性后计算发现,超导能隙在零温时存在一个临界能级间距 $d_{\rm c}$.当 $d_{\rm c}^{\rm o}$ 大于 0.89 $\Delta(0)$时,能隙消失.其中 $\Delta(0)$为零温时块状超导体的能隙.偶电子数和奇电子数的临界能级间距比为 $d_{\rm c}^{\rm e}/d_{\rm c}^{\rm o}=4$.Smith 和 Ambegaokar[9]考虑能级统计效应后用 Wigner-Dyson Surmise 进行计算后得出,$< d_{\rm c}^{\rm e} >$和$< d_{\rm c}^{\rm o} >$都比未考虑能级统计效应前有所增大.这里提出一个问题,即在考虑能级统计效应后,$< d_{\rm c}^{\rm e} >$,$< d_{\rm c}^{\rm o} >$,和$< d_{\rm c}^{\rm e} >/< d_{\rm c}^{\rm o} >$会怎样变化.以下我们将 Smith 等人的方法扩展到随机矩阵理论(Random Matrix Theory)[10]中的三种高斯系综(GOE,GUE 和 GSE),并同时考虑其奇/偶电子数效应,并得出结论.

2 模型与计算

我们仍采用平均场理论自洽方程[5].仅考虑当 $T=0$ 时基态 $S_z=0$ 和 $S_z=1/2$ 配位情况(见图 1).对奇电子数情形,设化学势位于半填满能级 ε_0(图 1,$S_z=1/2$),则能隙方程可写为

* 重庆市科委基金(批准号:97-4730)及江苏省重点实验室基金资助的课题.

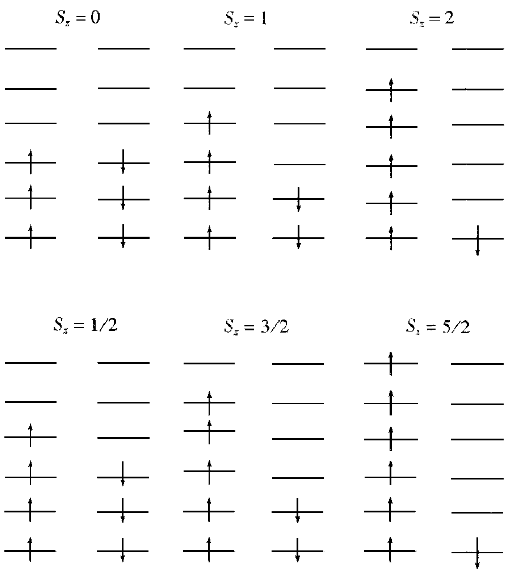

图 1 偶电子数($S_z=0,1,2$)和奇电子数($S_z=1/2,3/2,5/2$)的最低能量配位

$$\frac{1}{\lambda}=d\sum_i\frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon_l-\varepsilon_0)^2+\widehat{\Delta}(0)^2}}. \tag{1}$$

两能级关联函数(TLCF)定义为

$$R(\varepsilon-\varepsilon')=d^2\left\langle\sum_{i,j}\delta(\varepsilon-\varepsilon_i)\delta(\varepsilon'-\varepsilon_j)\right\rangle. \tag{2}$$

令上式中 $\varepsilon'=0$,从而得到

$$\begin{aligned}R(\varepsilon)&=d^2\left\langle\sum_{i,j}\delta(\varepsilon-\varepsilon_j)\delta(\varepsilon_j)\right\rangle\\&=d^2\left\langle\sum_{i,j}\delta(\varepsilon-(\varepsilon_i-\varepsilon_j))\delta(\varepsilon_j)\right\rangle\\&\approx d\left\langle\sum_{i}\delta(\varepsilon-(\varepsilon_i-\varepsilon_0))\right\rangle.\end{aligned} \tag{3}$$

因此,在考虑能级统计效应后,奇电子数满足的自洽方程为[9]

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\pi\omega_c/d^{\circ}}\mathrm{d}x\,\frac{R(x)}{\sqrt{x^2+(\pi\widehat{\Delta}(0)/d^{\circ})^2}}, \tag{4}$$

式中 $x=\pi\omega/d^{\circ}$. 由于在临界能级间距 d_c° 处及零温时,$\widehat{\Delta}(0)=0$,所以奇电子数临界能级间距 d_c° 满足的方程为

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\pi\omega_c/d_c^{\circ}}\mathrm{d}x\,\frac{R(x)}{x}. \tag{5}$$

对于偶电子数情形,化学势位于最后一个填满能级 ε_0 和下一个能级 ε_1 之间(图 1,$S_z=0$),因此能隙方程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}&=d\sum_i\frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon_i-(\varepsilon_0+\varepsilon_1)/2)^2+\widehat{\Delta}(0)^2}}\\&=d\sum_i\frac{1}{2\sqrt{((\varepsilon_i-\varepsilon_1)+(\varepsilon_1-\varepsilon_0)/2)^2+\widehat{\Delta}(0)^2}}\end{aligned} \tag{6}$$

由前面的分析可知,$(\varepsilon_i-\varepsilon_1)$ 由两能级关联函数 $R(x)$ 描述. 而 $(\varepsilon_1-\varepsilon_0)$ 由最近邻能级间距分布 $p(\delta)$ 给出. 其中 $\delta=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)/d^{e}$. 若 $(\varepsilon_i-\varepsilon_1)$ 和 $(\varepsilon_1-\varepsilon_0)$ 这两项可以分开来处理,则可得偶电子数临界能级间距 d_c^{e} 满足的方程为

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{2p(y)}{y}+\int_0^{\pi\omega_c/d_c^{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{R(x)p(y)}{\pi(x+y/2)}, \tag{7}$$

其中 $y=\pi(\varepsilon_1-\varepsilon_0)/d^{e}$. 以上我们得到奇电子数和偶电子数临界能级间距所满足的方程. 现在我们就来将方程(5)和方程(7)用于随机矩阵理论[10-12]的不同的系综中.

根据随机矩阵理论,对于高斯正交系综有

$$R(x)=1-\frac{\sin^2x}{x^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \tag{8}$$

将(8)式代入(5)式积分,从而解得

$$\begin{aligned}\langle d_c^{\circ}\rangle&=2\pi\omega_c\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}+\gamma+\frac{\pi^2}{16}-\frac{7}{4}}\\&=\pi\mathrm{e}^{\gamma+\frac{\pi^2}{16}-\frac{7}{4}}\Delta(0)=1.80\Delta(0).\end{aligned} \tag{9}$$

上式中 γ 为欧拉常数,等于 $0.5772\cdots$. 对于偶电子数情形,最邻近能级分布函数为

$$\begin{aligned}p(y)&=\frac{\pi}{2}\delta\exp\left(-\frac{\pi}{4}\delta^2\right)\\&=\frac{1}{2}y\exp\left(-\frac{1}{4\pi}y^2\right).\end{aligned} \tag{10}$$

将 $R(x)$ 和 $p(y)$ 代入(7)式. 注意(7)式中的第二项,如果分母用 x 代替 $x+y/2$,则该项便成为奇电子积分. 因此可得二者的关系为

$$\langle d_c^{e}\rangle=\exp(\pi-2I_1/\pi)\langle d_c^{\circ}\rangle, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1=&\int_0^{\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2/\pi}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2x}{x^2}-\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)\right.\\&\left.\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)\frac{\mathrm{d}x}{x(x+t)},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\sin(z)=\int_0^{z}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u. \tag{13}$$

利用数值积分可算得 $I_1=1.73435$. 将 I_1 的值代入(11)式得

$$\langle d_c^e \rangle = 7.67 \langle d_c^o \rangle. \tag{14}$$

同理对于高斯幺正系综,将

$$R(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{32}{\pi^2}\delta^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi}\delta^2\right) \\ &= \frac{32}{\pi^4}y^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi^3}y^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

将(15),(16)式分别代入(5)式和(7)式,可得

$$\begin{aligned} \langle d_c^o \rangle &= 2\pi\omega_c e^{-\frac{1}{\lambda}+\gamma-\frac{3}{2}} = \pi e^{\gamma-\frac{3}{2}}\Delta(0) \\ &\approx 1.25\Delta(0), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\langle d_c^e \rangle = \exp(8/\pi - 2I_2/\pi) \langle d_c^o \rangle, \tag{18}$$

其中

$$I_2 = \frac{128}{\pi^4}\int_0^\infty t^3 e^{-16t^2/\pi^3} dt \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\frac{dx}{x(x+t)}, \tag{19}$$

积分得 $I_2=1.3024$,代入(18)式得

$$\langle d_c^e \rangle = 5.57 \langle d_c^o \rangle. \tag{20}$$

对于高斯辛系综,将两能级关联函数

$$R(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \tag{21}$$

和最邻近能级分布函数

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(\frac{64}{9\pi}\right)^3 \delta^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi}\delta^2\right) \\ &= \left(\frac{64}{9\pi}\right)^3 \left(\frac{y}{\pi}\right)^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi^3}y^2\right) \end{aligned} \tag{22}$$

代入(5)式和(7)式中计算可得

$$\begin{aligned} \langle d_c^o \rangle &= 2\pi\omega_c e^{-\frac{1}{\lambda}+\gamma-\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{16}} \\ &= \pi e^{\gamma-\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{16}}\Delta(0) \approx 0.53\Delta(0), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\langle d_c^e \rangle = \exp(64/9\pi - 2I_3/\pi) \langle d_c^o \rangle, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} I_3 = \left(\frac{64}{9\pi}\right)^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \int_0^\infty t^5 e^{-256t^2/(9\pi^3)} dt \int_0^\infty \Bigg(1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ + \sin(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg)\frac{dx}{x(x+t)}, \end{aligned} \tag{25}$$

积分得 $I_3=0.6652$. 因此得

$$\langle d_c^e \rangle = 6.30 \langle d_c^o \rangle. \tag{26}$$

3　分析与结论

从前面的计算可看出,在考虑了能级统计效应后,不同系综的$\langle d_c^o \rangle$和$\langle d_c^e \rangle$比 von Delft 等人的结果有不同程度的变化(见表 1). $\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$的值在 5 到 8 之间. 在高斯正交系综,我们的结果比 von Delft 等人的无论是$\langle d_c^o \rangle$,$\langle d_c^e \rangle$还是$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$都有所增大,$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle \approx 8$,与 Smith 等人的结果相同. 此时如果增大外磁场,则整个能级将呈泊松分布. 各能级随机分布,不存在关联效应,可近似估计$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle \to \infty$. 而对高斯幺正系综,$\langle d_c^o \rangle$,$\langle d_c^e \rangle$及$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$的值均比未计入能级统计效应前有所增大,但与高斯正交系综相比却减小. 对高斯辛系综,$\langle d_c^o \rangle$,$\langle d_c^e \rangle$的值都比未考虑能级统计效应时有所减小,但$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$比未考虑能级统计效应时有所增大. 因此,在考虑能级统计效应后,并非所有的$\langle d_c^o \rangle$,$\langle d_c^e \rangle$值都会增大,要视具体系综而论. 但$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$的值均比未考虑能级统计效应时有所增大. 可见$\langle d_c^e \rangle$的变化快于$\langle d_c^o \rangle$的变化. 众所周知,三种统计系综在物理上分别对应于[13]

弱自旋-轨道耦合和弱磁场——高斯正交系综
强自旋-轨道耦合和强磁场——高斯幺正系综
强自旋-轨道耦合和弱磁场——高斯辛系综

因而可以看出,自旋-轨道的耦合作用对$\langle d_c^o \rangle$,$\langle d_c^e \rangle$和$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$的影响比磁场的作用要大. 自旋-轨道耦合作用越弱,$\langle d_c^e \rangle$和$\langle d_c^o \rangle$越大,它们之间的比例系数也越大. 如果单纯从磁场角度考虑,比较高斯幺正系综和高斯辛系综又可发现,在强自旋-轨道耦合下,磁场越强,$\langle d_c^e \rangle$和$\langle d_c^o \rangle$的值越大. 但在高斯辛系综中,虽然$\langle d_c^e \rangle$和$\langle d_c^o \rangle$的值相对于等能级间距的均减小,但奇电子数情形比偶电子数情形减小更多,所以高斯辛系综的$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle=6.30$反而大于高斯幺正系综的$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle=5.57$.

表1　不同系综的$\langle d_c^o \rangle$和$\langle d_c^e \rangle$的值,单位为 $\Delta(0)$及$\langle d_c^e \rangle/\langle d_c^o \rangle$的值

	*	GOE	GUE	GSE
$\langle d_c^o \rangle$	0.89	1.80	1.25	0.53
$\langle d_c^e \rangle$	3.56	13.81	6.96	3.21
$\frac{\langle d_c^e \rangle}{\langle d_c^o \rangle}$	4.00	7.67	5.57	6.30

其中 * 下所对应的值对应于等能级间距.

现在我们再来看在奇电子数中 $\widehat{\Delta}(0)$随$\langle d^0 \rangle$的变化情况. 由方程(4),我们考虑能级统计后的能隙

方程为

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\pi\omega_d/d^\circ}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+(\pi\hat{\Delta}(0)/d^\circ)^2}}+\int_0^\infty\frac{(R(x)-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+(\pi\hat{\Delta}(0)/d^\circ)^2}}. \tag{27}$$

由此能隙方程,可得

$$\ln\frac{\Delta(0)}{\hat{\Delta}(0)}=\int_0^\infty\frac{(1-R(x))\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+(\pi\hat{\Delta}(0)/d^\circ)^2}}. \tag{28}$$

对方程(28)可解出,见图2曲线的a(GOE),图2曲线的b(GUE),图2曲线的c(GSE).将我们的结果与文献[8]中图1(a)比较知,在考虑了能级统计效应后,$\hat{\Delta}(0)$随d°的关系比未考虑能级统计时有很大的变化.

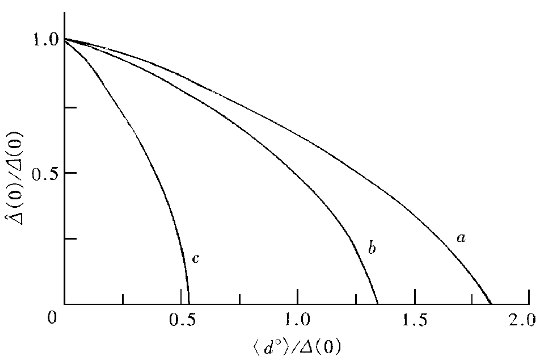

图2 奇电子数的$\hat{\Delta}(0)/\Delta(0)$随$\langle d^\circ\rangle/\Delta(0)$的变化情况

[1] M. T. Tuominen, J. M. Hergenrother, T. S. Tighe, M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992). 1997.
[2] P. Lafarage *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993), 994.
[3] D. V. Averin, Y. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 1993.
[4] D. S. Golubev, A. D. Zaikin, *Phys, Lett.*, **A195**(1994). 380
[5] B. Jankó, A. Smith, V. Ambegaokar, *Phys. Rev.*, **B50**(1994), 1152.
[6] C. T. Black, D. C. Ralph, M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 688.
[7] D. C. Ralph, C, T, Black, M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 3241.
[8] J. Von Delft, A. D. Zaikin, D. S. Golubev, W. Tichy, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 3189.
[9] R. A. Smith, V. Ambegaokar, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 4962.
[10] M. L. Mehta, Random Matrices, Academic Press, Boston, (1991).
[11] W. P. Halperin, *Rev. Mod. Phys.*, **58**(1986), 533.
[12] K. B. Efetov, *Adv. Phys.*, **32**(1983), 53.
[13] D. V. Averin, A. N. Korotkov, *Sov. Phys. JEPT*, **70**(1990), 937.

LEVEL STATISTICS IN SUPERCONDUCTIVITY IN ULTRASMALL METALLIC GRAINS*

CHEN ZHI-QIAN[1)2)] ZHENG REN-RONG[3)2)1)] CHEN HONG[1)] YAO CHUN-QING[4)]

[1)] (*Department of Physics, Southwest China Normal University, Chongqing* 400715, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Suzhou University, Suzhou* 215006, *China*)

[3)] (*Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234, *China*)

[4)] (*Department of Mathematics, Southwest China Normal University, Chongqing* 400715, *China*)

(Received 23 June 1999; revised manuscript 24 October 1999)

ABSTRACT

The effect of level statistics on critical level spacings $\langle d_c \rangle$ of odd/even electrons are calculated by using the mean field self-consistency equation in three different Gauss ensembles (Gauss Orthogonal Ensemble, Gauss Unitary Ensemble, and Gauss Symplectic Ensemble) according to Random Matrix Theory. We obtain the ratios of critical level spacings of even electrons to those of odd electrons in different spin-orbit coupling and magnetic fields quantitatively, and the relations of $\widetilde{\Delta}(0)$ and average level spacings $\langle d^{o} \rangle$ in the odd case.

PACC: 7337; 4255

* Project supported by the Chongqing Science and Technology Foundation. (Grant No. 97-4730) and the Key Laboratory. Fund of Jiangsu Province, China.