

层状介质中异质散射源三维定位逆问题的 加权傅里叶变换研究^{*}

张 航^{1,2)} 何赛灵¹⁾ 陈 攀^{1,2)} 孙 威²⁾

¹⁾ 浙江大学现代光学仪器国家重点实验室, 光及电磁波研究中心 杭州 310027)

²⁾ 浙江大学物理系 杭州 310027)

(2000 年 12 月 17 日收到, 2001 年 3 月 13 日收到修改稿)

为了获得散射介质中异质结构信息, 建立了层状均匀介质中含有一个较小的异质球模型, 考虑小异质球对光(电磁波) 的传播的影响是微扰的, 在吸收边界条件下求得漫射方程一级微扰的基本解. 同时考察漫射方程在二维傅里叶空间里形式解的特性, 提出一种新颖的加权逆傅里叶变换. 在加权傅里叶变换作用下, 模型的表面数据在异质球位置上存在奇异性, 结合数据本身的对称性, 从而可以确定异质球的三维位置.

关键词: 加权傅里叶变换, 漫射方程, 三维定位, 异质结构, 层状介质
PACC: 4220, 0290

1 引 言

散射介质中的光传播可以由 Boltzmann 输运理论来很好的描述, 通常输运方程的直接求解是困难的^[1,2]. 在散射系数比吸收系数大得多的情况下, 如生物组织中近红外光的传播, 可用漫射方程来近似输运方程^[3]. 利用漫射方程和已知介质参量的空间分布求出散射介质中光的传播过程和光通量的空间分布, 这个过程为光散射理论的正问题研究. 光散射正问题的研究已比较成熟, 主要有 Monte-Carlo 模拟、有限元法、有限差分法、多极矩展开法和基于 Born 近似的一级微扰法等计算方法^[3-7]. 而光散射逆问题(光逆散射) 的研究, 是在已知介质表面的光分布的情况下倒求散射介质内部介质参量的空间分布的过程, 相对而言比较复杂. 研究方法通常是用优化反演算法结合正问题的解来重构介质特性参量的空间分布^[8,9], 在低维情况下也可用格林函数来重构介质特性参量^[10]. 从本质上说, 逆问题的求解是对非线性积分方程的求解, 存在一个病态问题, 尽管采用重整化技术能在一定程度上解决这个问题, 但需要以牺牲分辨率为代价^[11,12]. 所以用解析方法实现介质空间信息的较好重构目前还相当困难. 本文

在这方面做了一些新的探索, 提出一种巧妙的方法来提取微扰源的三维位置信息.

首先建立了一个层状均匀介质中含有一个较小的异质球模型, 考虑小异质球对光(电磁波) 的传播的影响是微扰的^[13], 在吸收边界条件下求得漫射方程一级微扰解. 再利用解的平面对称性可以确定异质球的平面位置, 从而使问题简化为一维问题. 同时考察漫射方程在二维傅里叶空间里关于第三维(深度) 的形式解的特性, 构造了一个合适的权重函数并作用到逆傅里叶变换上, 使得返回原空间后的解在异质球位置上存在奇异性, 从而利用这个奇异性实现异质球的三维定位.

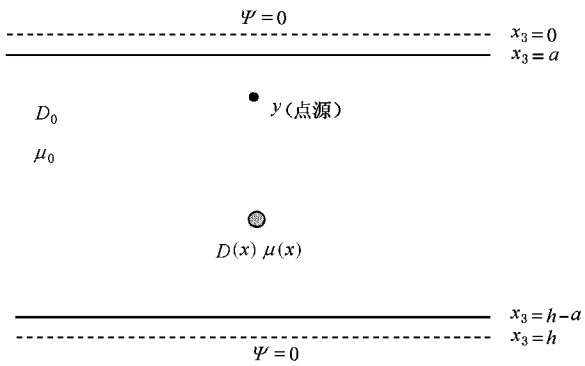


图 1 含异质球的层状介质模型

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 39970220)资助的课题.

2 层状介质中漫射方程的微扰解

如图 1 所示,实线表示介质真实上下表面,厚度为 $h - 2a$. 虚线表示吸收边界,到真实边界的距离为 a . 吸收边界为 $\partial\Omega = \{x \in R^3 | x_3 = 0 \text{ 或 } x_3 = h\}$, 吸收边界内区域表示为 $\Omega = \{x \in R^3 | 0 < x_3 < h\}$, 物理边界内区域 $\Omega_a = \{x \in R^3 | 0 < a < x_3 < h - a\}$. s 为垂直入射激光束的等效点源,周边介质的参量为 (D_0, μ_0) , 异质球的介质参量为 $(D(x), \mu(x))$, x 为三维坐标. 在频域,此模型内的光传输可以由下面的漫射方程描述^[13,14]:

$$\begin{cases} (\nabla \cdot (D(x) \nabla) + \mu(x) + \frac{i\omega}{c})\psi = \delta(x - x_s), \\ x \in \Omega \times R, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\psi(x, x_s)$ 为光子密度波(光通量), x_s 点源坐标, $D(x)$ 和 $\mu(x)$ 分别为漫射系数和吸收系数. 为分析方便,我们用 $\Psi = \sqrt{D(x)}\psi(x, x_s)$ 替换(1)式中的 $\psi(x, x_s)$ 得到

$$\begin{cases} (-\Delta + Q(x))\Psi = \sqrt{D(x)}\delta(x - x_s), & x \in \Omega, \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$Q(x) = \frac{\Delta \sqrt{D(x)}}{\sqrt{D(x)}} + \frac{\mu(x)}{D(x)} + i\omega \frac{1}{cD(x)}. \quad (3)$$

异质球对层状介质内光传播的作用为微扰,则异质球内的光学特性参量可表示为

$$D(x) = D_0 + D_1(x), \mu(x) = \mu_0 + \mu_1(x),$$

式中 $D_1(x), \mu_1(x)$ 相对于 D_0, μ_0 是小量. 这样 $Q(x)$ 也可写成

$$Q(x) = Q_0 + Q_1(x), \quad (4)$$

其中

$$Q_0 = Q_{00} + i\omega Q_{01}(x),$$

式中 $Q_{00} = \mu_0/D_0$, $Q_{01} = 1/cD_0$. 还有

$$Q_1 = Q_{10} + i\omega Q_{11}(x), \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_{10} &= \frac{\Delta \sqrt{D_1(x)}}{2D(x)} + \frac{\mu_1(x)}{D_0} - \frac{\mu_0}{D_0^2} D_1(x), \\ Q_{11} &= -\frac{D_1(x)}{cD_0^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

同样把 $\Psi_0(x, x_s)$ 分为两部分表示,

$$\Psi(x, x_s) = \Psi_0(x, x_s) + \Psi_1(x, x_s), \quad (7)$$

其中 $\Psi_0(x, x_s)$ 满足下面的方程:

$$\begin{cases} (-\Delta + Q_0)\Psi_0 = \sqrt{D_0}\delta(x - x_s) & x \in \Omega, \\ \Psi_0|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

在忽略高次项后, $\Psi_1(x, x_s)$ 满足方程

$$\begin{cases} (-\Delta + Q_0)\Psi_1 = -Q_1(x)\Psi_0(x, x_s) & x \in \Omega, \\ \Psi_1|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

方程(8)的解可用格林函数镜象法求得

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, x_s) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{D_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_s^{(n)}|} \\ &\quad \cdot \exp[-\sqrt{Q_0}|x - x_s^{(n)}|], \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $x_s^{(n)} = (x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}^{(n)})$ 而

$$\begin{aligned} x_{s3}^{(n)} &= \begin{cases} x_{s3}^{(0)} + nh & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ -x_{s3}^{(0)} + (n+1)h & n = \pm 1, \pm 3, \dots, \end{cases} \\ C_n &= \begin{cases} 1 & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ -1 & n = \pm 1, \pm 3, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

将(10)式代入方程(9)可得

$$\Psi_1(x, x_s) = -\sqrt{D_0} \int_{\Omega_1} Q_1(\xi) \Psi_0(\xi, x_s) \Psi_0(x, \xi) d\xi, \quad (11)$$

其中 Ω_1 是介质球所在区域,并认为 $x_s \notin \Omega_1$. 上式就是层状介质中异质球模型下的微扰解.

3 散射源的三维定位

对待测物来说,其中所含的异质球的位置是固定的,所以光源位置确定后(9)式中的 $\Psi_0(x, x_s) = \Psi_0(x', x_s)$ 是一个恒定值. 当异质球很小时可当作点源处理,则

$$Q_1(x) = Q_1(x')\delta(x - x'), \quad (12)$$

其中 x' 为异质球心坐标,把它代入(9)式可得到

$$\begin{cases} (-\Delta + Q_0)\Psi_1 = -A_0\delta(x - x') & x \in \Omega, \\ \Psi_1|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $A_0 = Q_1(x')\Psi_0(x', x_s)$. 把(12)式代入(11)式可得到介质物理上表面的一级微扰分布 $F(x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) &= \Psi_1|_{x_3=a} = A_0 \Psi_0(\bar{x}, a, x'), \\ \bar{x} &= (x_1, x_2). \end{aligned} \quad (14)$$

当然, $F(\bar{x})$ 也完全可以由实验或其他计算方法获得. 显然 $F(\bar{x})$ 具有平面对称性, 并由此可以确定异质球的平面位置 (x'_1, x'_2) . 然后我们来求异质球的第三维位置 x'_3 , 对 $F(\bar{x})$ 作傅里叶变换,

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_{R^2} F(\bar{x}) e^{i\lambda\bar{x}} d\bar{x} \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2). \quad (15)$$

再对方程 (13) 作二维傅里叶变换可得到

$$\begin{cases} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + |\lambda|^2 + Q_0 \right) \tilde{\Psi}_1 = A_0 e^{i\lambda\bar{x}} \delta(x_3 - x'_3), \\ \tilde{\Psi}_1|_{\{x_3=0\} \cap \{x_3=h\}} = 0, \\ \tilde{\Psi}_1|_{\{x_3=a\}} = \tilde{F}(\lambda). \end{cases} \quad (16)$$

方程 (16) 的解具有下面形式:

$$\tilde{\psi}_1(\lambda, x_3) = \frac{A_0 e^{i\lambda\bar{x}}}{2\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}} \cdot [\varphi_1(\lambda, x_3) + \varphi_2(\lambda, x_3)], \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda, x_3) &= \begin{cases} \exp[-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(x_3 - x'_3)] & x_3 \geq x'_3, \\ \exp[+\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(x_3 - x'_3)] & x_3 < x'_3, \end{cases} \\ \varphi_2(\lambda, x_3) &= -\frac{1}{\sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}h)} \cdot \left[\exp(-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(x_3 - h)) \cdot \sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}x'_3) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}x_3) \cdot \sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(h - x'_3)) \right]. \end{aligned}$$

相应的 $\tilde{F}(\lambda)$ 有如下形式:

$$\tilde{F}(\lambda) = \tilde{F}_1(\lambda) + \tilde{F}_2(\lambda), \quad (18)$$

其中

$$\tilde{F}_1(\lambda) = A_0 \exp(i\lambda\bar{x}) \frac{\exp(-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(a - x'_3))}{2\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(\lambda) &= -A_0 e^{i\lambda\bar{x}} \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0} \sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}h)} \cdot \left[\exp(-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(a - h)) \cdot \sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}x'_3) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}a) \cdot \sinh(\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0}(h - x'_3)) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

针对 $\tilde{F}_1(\lambda)$ 的结构特点, 我们构造下面权重函数:

$$W(\lambda, z) = \exp\left[\sqrt{|\lambda|^2 + Q_0} \cdot (z - a)\right] \quad a \leq z < h, \quad (21)$$

并作用到逆傅里叶变换中,

$$\hat{F}(\bar{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \tilde{F}(\lambda) W(\lambda, z) e^{-i\lambda\bar{x}} d\lambda. \quad (22)$$

由 (19) (20) 和 (22) 式可得到

$$\hat{F}(\bar{x}, z) = \hat{F}_1(\bar{x}, z) + \hat{F}_2(\bar{x}, z), \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{F}_k(\bar{x}, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \tilde{F}_k(\lambda) W(\lambda, z) \cdot e^{-i\lambda\bar{x}} d\lambda \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (24)$$

不难分析 $\hat{F}_2(\bar{x}, z)$ 是个有界函数, 取其最大值为 M_0 , 则有

$$\hat{F}(\bar{x}, z) \leq \hat{F}_1(\bar{x}, z) + M_0. \quad (25)$$

而 $\hat{F}_1(\bar{x}, z)$ 仅在 $(a \leq z < x'_3)$ 区域内为有界, 当 $z \geq x'_3$ 时, 权重函数会使 $\hat{F}_1(\bar{x}, z)$ 的逆傅里叶变换发散, 因而无界. 这使得在 $z = x'_3$ 点处 $\hat{F}(\bar{x}, z)$ 存在奇异性, 也就确定了异质球的深度 x'_3 .

4 数值模拟结果

在数值模拟中, 首先需要得到一组基于该模型物理上表面上的一级微扰光分布 $F(x_1, x_2)$, 一般可以有两种方法获得: 一是直接由上面的 (11) 式产生; 另一种则由其他数值计算方法获得, 如用有限差分法、有限元法和 Monte Carlo 法计算的总光分布减去零级光分布得到. 本文采用前一种方式产生 $F(x_1, x_2)$. 取 $D_0 = 1.0$, $\mu_0 = 1.0 \text{ cm}^{-1}$, $D_1 = 0.0$, 在球位置处 $\mu_1 = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $h = 1.0 \text{ cm}$ 和 $(x'_1 = x'_2 = 0.0, x'_3$

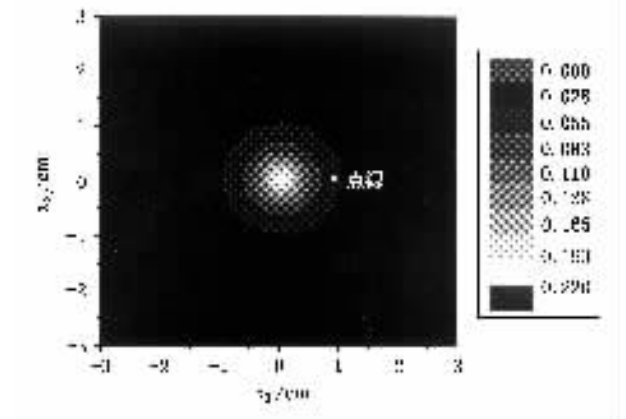


图2 上表面一级微扰光分布

$= 0.6\text{cm}$), 则图 2 就是由 (11) 式产生的光强分布. 从图 2 上可以看出, $F(x_1, x_2)$ 具有在 (x_1, x_2) 平面上关于异质球球心位置 (x'_1, x'_2) 的圆对称性, 所以可从圆对称性中得到异质球球心位置. 这样就只剩下维深度 x'_3 有待确定.

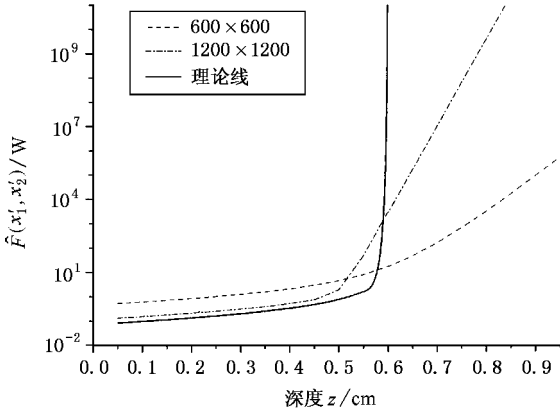


图 3 $\hat{F}(x'_1, x'_2)$ 随 z 的变化图

然后按照上面思路, 对 $F(x_1, x_2)$ 作二维傅里叶变换得到 $\hat{F}(x_1, x_2)$, 再作用上权重函数 $W(\lambda, z)$ 后作二维逆傅里叶变换得到 $\hat{F}(x_1, x_2)$. 我们重点考察 $\hat{F}(x'_1, x'_2)$ 的值随 z 的变化情况, 所以对 $W(\lambda, z)$ 在 $z \in (a, h-a)$ 的区域内以 $h/20$ 为间隔作扫描, 得到图 3. 图 3 中实线为理论分析理想情况, 虚线是以 0.1cm 为采样周期的 600×600 数据矩阵的计算结果, 点划线是以 0.05cm 为采样周期的 1200×1200 数据矩阵的计算结果. 从图 3 中看出, 无论虚线还是点划线都在 $z < 0.60\text{cm}$ 时 $\hat{F}(x'_1, x'_2)$ 的值仅作缓慢增加, 表明得到很好的收敛, 而在 $z =$

0.60cm 处发生突然的变化, $\hat{F}(x'_1, x'_2)$ 的值在对数 (\log_{10}) 坐标上也表现出突然的增加, 这表明在该处 $\hat{F}(x'_1, x'_2)$ 的值已不再收敛, 即存在奇异性, 而这一点正是异质球所在的位置. 这样, 异质球三维位置得到了确定.

由于数值计算存储空间和计算能力的有限性, 二维傅里叶变换计算中不能做到无限积分, 因此计算曲线与理论曲线之间存在差距, 但计算结果也表明计算空间更大的点划线要比虚线更接近于理论曲线, 也就是说, 随着计算空间的扩大计算结果将向理论曲线靠拢和逼近, 而且随着计算空间的进一步扩大, 这种差异将越来越小.

5 结 语

本文利用一级微扰解的对称性确定了层状介质中异质球的平面位置 x'_1 和 x'_2 , 将三维问题方便地转换为一维定位问题, 又在问题的傅里叶空间里针对解的特点引入一个合适的权重函数, 使得在返回原空间后解在异质球位置上产生奇异性, 从而巧妙地实现了第三维的定位. 接下去我们还将开展对 Q 值和多源情况乃至连续介质的重构工作. 本文为光散射及同类领域的逆问题解析研究提供一条新的思路, 并在医学检测、工程探测等方面具有广泛的应用前景.

感谢俄罗斯 V. G. Romanov 教授对本文工作所给予的支持和帮助.

- [1] A. Ishimaru, Wave Propagation and Scattering in Random Media (Academic, New York, 1978), Chapt. 7 9.
- [2] Richard C. Haskell et al., J. Opt. Soc. Am., **A11**(1994), 2727.
- [3] A. Ishimaru, Appl. Opt., **28**(1989), 2210.
- [4] W. Sun et al., Acta Opt. Sin., **14**(1994), 97 [in Chinese] 孙威等, 光学学报, **14**(1994), 97.
- [5] S.R. Arridge et al., Med. Phys., **20**(1993), 299.
- [6] R.Z. Rao, Acta Phys. Sin., **47**(1998), 1790 [in Chinese] 饶瑞中, 物理学报, **47**(1998), 1790.
- [7] D.A. Boas et al., Diffuse Photon Probes of Structural and Dynamical Properties of Turbid Theory and Biomedical Applications (Disser-tation, Univ. Pennsylvania, 1996), Chapt. 2.
- [8] H. Zhang et al., Acta Opt. Sin., **20**(2000), 1026 [in Chinese] [张 航等, 光学学报, **20**(2000), 1026].
- [9] H. Zhang et al., Proc. SPIE, **3863**(1999), 49.
- [10] J.P. Ying et al., Proc. SPIE, **2979**(1997), 619.
- [11] H. P. Baltes et al., Inverse Scattering Problems in Optics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1980), Chapt 5.
- [12] Brian W. Pogue et al., Appl. Opt., **38**(1999), 2950.
- [13] Martin R. Ostermeyer, Steven L. Jacques, J. Opt. Soc. Am., **A14**(1997), 255.
- [14] Vladimir G. Romanov, S. L. He, Inverse Problems, **16**(2000), 447.

INVERSE PROBLEMS FOR THREE-DIMENSIONAL LOCALIZATION OF AN INHOMOGENEITY IN A STRATIFIED SCATTERING MEDIUM BY USING A WEIGHTED FOURIER TRANSFORM^{*}

ZHANG HANG^{1 2)} HE SAI-LING¹⁾ CHEN PAN^{1 2)} SUN WEI²⁾

¹⁾ *Centre for Optical and Electromagnetic Research , State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China)*

²⁾ *Department of Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China)*

(Received 17 December 2000 ; revised manuscript received 13 March 2001)

ABSTRACT

Characterization of the structure of spatial inhomogeneities embedded in a highly scattering medium is required in many fields. In this paper , a model of a stratified medium embedded with an inhomogeneous ball is considered. With an assumption that the ball is small enough , a perturbation solution to diffusion equation is obtained with some boundary treatments. According to the characteristics of this solution in the two-dimensional Fourier space , a new weighted Fourier transform is used to process the surface data. After this process , a singularity appears at the center of the ball. Combining with the symmetry of the surface data , the information of three-dimensional position of the ball is determined.

Keywords : weighted Fourier transform , diffusion equations three-dimensional locating , inhomogeneities , stratified media

PACC : 4220 , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 39970220).