第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1837-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.10,October,2001

单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论

张宏彬

(巢湖师专物理系,巢湖 238000)

(2001 年 3 月 31 日收到;2001 年 4 月 28 日收到修改稿)

应用变换群 G_r 的无限小群变换的准对称性,给出了受单面约束的 Brikhoff 系统的 Noether 理论,并举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,单面约束 Birkhoff 系统,守恒量,对称性,Noether 定理
PACC:0316

1 引 言

动力学系统的守恒量在力学的研究中起着重要的作用,甚至在系统的运动方程不可积的情况下,某个守恒量的存在也可对所研究的系统的局部物理状态有所了解. 1918 年德国女数学家 Noether 提出一个定理[1],揭示了力学系统的守恒量与其内在动力学对称性的潜在关系. 近二十多年来,Noether 定理受到数学、力学和物理研究者的极大关注,被进行了各种形式的推广. 最近我国学者张毅,梅凤翔[2]又率先将广义 Noether 定理从双面约束系统推广至单面约束系统,建立了单面约束力学系统的 Noether 理论.

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的推广,对 Birkhoff 系统的研究已成为数学物理学科,特别是分析力学的一个近代发展方向,近几年我国学者在此领域的研究取得了重要进展[3—10]. 本文通过引进 r 参数变换群 G_r 的无限小变换的准对称概念,研究并给出受单面约束的 Birkhoff 系统的 Noether 定理和 Noether 逆定理. 由于受双面约束的 Birkhoff 系统的 Noether 定理可作为本文定理的推论. 因此本文的研究比以往的研究更有普遍意义.

2 单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理

如果 Birkhoff 系统中的变量 a^μ 不是彼此独立的,而是受到一些限制,且这些限制是单面约束

$$f_\beta(t,a^\mu)\geqslant 0\quad(\beta=1,2,\cdots,g;\mu=1,2,\cdots,2n),\tag{1}$$

则系统的运动方程可写成[11]

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\quad(\mu=1,2,\cdots,2n),$$

$$\lambda_\beta\geqslant 0,\ \lambda_\beta f_\beta=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g),\tag{2}$$

其中 $\Omega_{\mu\nu}$ 是 Birkhoff 协变张量,B 为 Birkhoff 函数,R_μ 为 Birkhoff 函数组,λ_β 为约束乘子. 如果系统在约束上,则 $f_\beta(t,a^\mu)=0$;如果系统脱离约束,则 $f_\beta(t,a^\mu)>0$ 此时,(2) 式的第一式右端为零.

引进一般形式的 r 参数有限变换群 G_r

$$t^*=g_0(t,a^\nu,b_\alpha)\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n),$$

$$a^{\mu*}=g_\mu(t,a^\nu,b_\alpha)\qquad(\alpha=1,2,\cdots,r),\tag{3}$$

其中 $b_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,r)$为独立参数,公式

$$t^*=t+\Delta t,$$

$$a^{\mu*}=a^\mu+\Delta a^\mu\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{4}$$

或其展开式

$$t^*=t+\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\xi_0^\alpha(t,\boldsymbol a),$$

$$a^{\mu*}=a^\mu+\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\xi_\mu^\alpha(t,\boldsymbol a)\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{5}$$

是变换群 G_r 的无限小变换,其中 ε_α 为无限小参数,具有一阶小量.

Pfaff 作用量

$$A(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t,\boldsymbol a)\mathrm da^\mu-B(t,\boldsymbol a)\mathrm dt\right\},\tag{6}$$

在变换前后的差为

$$A(\gamma^*)-A(\gamma)=\int_{t_1^*}^{t_2^*}\Big\{\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t^*,\boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}a^{\mu *}-B(t^*,\boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}t^*\Big\}-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu-B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t\Big\}, \tag{7}$$

其中 γ 与 γ^* 为给定曲线与邻近曲线,将其对 ε 的主线性部分,即精确到一阶小量的部分记为 ΔA,则有[12]

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha\Big)+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Big]\bar\xi_\mu^\alpha\Big\}\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中 $\bar\xi_\mu^\alpha=\xi_\mu^\alpha-\dot a^\mu\xi_0^\alpha\quad(\mu=1,2,\cdots,2n)$.

于是,有下述定理.

定理1 对单面约束 Birkhoff 系统(1),(2)如果有限群 G_r 的无限小群变换(5)式是准对称变换,并且这些无限小变换满足关系

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\bar\xi_\mu^\alpha=0\qquad\begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g\\ \alpha=1,2,\cdots,r\end{pmatrix}, \tag{9}$$

则系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha+G^\alpha=C^\alpha\qquad(\alpha=1,2,\cdots,r). \tag{10}$$

证 因无限小变换(5)是准对称变换,故有

$$\Delta A+\int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\Big]\mathrm{d}t=0, \tag{11}$$

其中 $\Delta G=\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha G^\alpha$.

将(8)式代入(11)式,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha+G^\alpha\Big)+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Big]\bar\xi_\mu^\alpha\Big\}\mathrm{d}t=0. \tag{12}$$

因无限小群变换(5)满足关系(9),故

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\bar\xi_\mu^\alpha\mathrm{d}t=0. \tag{13}$$

将(12)式与(13)式相加,有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha+G^\alpha\Big)+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\nu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\Big]\bar\xi_\mu^\alpha\Big\}\mathrm{d}t=0. \tag{14}$$

注意到方程(2),ε_α 的独立性及积分区间 $[t_1,t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha+G^\alpha\Big)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,r), \tag{15}$$

或者

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha+G^\alpha=C^\alpha\quad(\alpha=1,2,\cdots,r). \tag{16}$$

定理1可称为受单面约束的 Birkhoff 系统的 Noether 定理,利用该定理可以由已知对称性求出系统的守恒量,需要指出的是,由于约束方程(1)为不等式,因此条件(9)比双面约束系统相应的条件苛刻得多,从而限制了无限小群变换的生成函数的选择范围而导致守恒量数目的减少.

当 $r=1$ 时,定理1退化为如下推论.

推论1 对于单面约束 Birkhoff 系统(1),(2)如果无限小群变换的生成元 ξ_μ,ξ_0 以及规范函数 G 满足

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}(\xi_\mu-\dot a^\mu\xi_0)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g), \tag{17}$$

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\Big)\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Big)\xi_\mu-B\dot\xi_0+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot\xi_\mu+\dot G=0, \tag{18}$$

则系统存在守恒量

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G=\mathrm{const}. \tag{19}$$

若系统受双面约束

$$f_\beta(t,a)=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g), \tag{20}$$

则有

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\delta a^\mu=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g), \tag{21}$$

利用 Δ 与 δ 运算的关系,并考虑(5)式,有

$$\delta a^\mu=\Delta a^\mu-\dot a^\mu\Delta t=\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha(\xi_\mu^\alpha-\dot a^\mu\xi_0^\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\bar\xi_\mu^\alpha. \tag{22}$$

将(22)式代入(21)式,并考虑 ε_α 的独立性,得

$$\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\bar{\xi}_\mu^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1,2,\cdots,g\\ \alpha = 1,2,\cdots,r\end{pmatrix}, \tag{23}$$

由定理 1 得

推论 2 对于双面约束 Birkhoff 系统,如果有限群 G_r 的无限小群变换(5)是准对称变换,同时这些无限小群变换又满足(23)式,则此双面约束 Birkhoff 系统存在 r 个形如(10)式的线性独立的第一积分.

如果 Birkhoff 系统是自由的不受约束,则定理 1 给出

推论 3 对自由 Birkhoff 系统,如果有限群 G_r 的无限小群变换(5)是准对称变换,则系统存在 r 个形如(10)式的线性独立的第一积分.

推论 2、推论 3 已由文献[12]给出.

3 单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理

现在研究根据已知第一积分来寻求相应的无限小准对称变换问题.

假设单面约束 Birkhoff 系统(1),(2)有 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t,\boldsymbol{a}) = C^\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,r), \tag{24}$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,r), \tag{25}$$

将(2)式的第一式两端同时乘以 $\bar{\xi}_\mu^\alpha$ 并对 μ 求和,再将结果与(25)式相加,得

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu + \sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\Big)\bar{\xi}_\mu^\alpha = 0. \tag{26}$$

(26)式中含 $\dot{a}^\mu\dot{a}^\nu$ 的项显然为零,利用条件(9),由(26)式中 $\dot{a}^\nu$ 的系数为零,得到

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\xi_\mu^\alpha + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha = 0 \qquad (\nu = 1,2,\cdots,2n), \tag{27}$$

因

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{28}$$

非退化,故由方程(27)解得

$$\xi_\mu^\alpha = \sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\left\{\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha\right\} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\cdots,2n\\ \alpha = 1,2,\cdots,r\end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} \qquad (\mu,\rho = 1,2,\cdots,2n). \tag{30}$$

为使变换是准对称的,需令积分(24)式等于守恒量(10)式,即令

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,r). \tag{31}$$

这样,由 $(2n+1)r$ 个方程(29),(31)便可确定 $(2n+1)r$ 个生成函数 $\xi_0^\alpha,\xi_\mu^\alpha$.

如果对于所讨论单面约束 Birkhoff 系统,无限小群变换满足(9)式. 将(9)式,(31)式代入(26)式,整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha\Big) + \sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\Big)\bar{\xi}_\mu^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,r). \tag{32}$$

由文献[12]的判据知,它是准对称变换,于是有下述定理.

定理 2 如果已知单面约束 Birkhoff 系统(1),(2)的 r 个线性独立的第一积分(24)式,那么由(5),(29)和(31)式所有确定的无限小群变换,只要满足关系(9),必是系统的准对称变换.

定理 2 可称为单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理.

显然,对双面约束 Birkhoff 系统,定理 2 给出.

推论 4 如果已知双面约束 Birkhoff 系统的 r 个线性独立的第一积分,那么由(5),(29)和(31)式所确定的无限小群变换,只要满足关系(9),必是系统的准对称变换.

如果 Birkhoff 系统是自由的,则定理 2 成为

推论 5 如果已知自由 Birkhoff 系统的 r 个线性独立的第一积分,那么由(5),(29)和(31)式所确定的无限小群变换,必是系统的准对称变换.

推论 4、推论 5 已由文献[12]给出.

4 算 例

四阶 Birkhoff 系统为

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2)+(a^3)^2+(a^4)^2\},$$
$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0. \tag{33}$$

受单面约束

$$f_1=a^1a^3-c_1^2\geqslant 0,$$
$$f_2=a^1+a^4t-c_2\geqslant 0. \tag{34}$$

试研究系统的 Noether 对称性和守恒量.

首先,利用定理 1 由已知对称性求守恒量,由(17),(18)两式可得

$$a^3(\xi_1-\dot{a}^1\xi_0)+a^1(\xi_3-\dot{a}^3\xi_0)=0,$$
$$\xi_1-\dot{a}^1\xi_0+t(\xi_4-\dot{a}^4\xi_0)=0, \tag{35}$$
$$(\dot{a}^1-a^3)\xi_3+(\dot{a}^2-a^4)\xi_4-a^1\xi_1$$
$$-B\dot{\xi}_0+a^3\dot{\xi}_1+a^4\dot{\xi}_2=-\dot{G},$$

方程(35)有解

$$\xi_0=0, \xi_2=1, \xi_1=\xi_3=\xi_4=0, G=0. \tag{36}$$

由(19)式可得守恒量

$$I=a^4=\text{const}. \tag{37}$$

其次,利用定理 2 由已知积分求相应的准对称变换,假设有积分(37),则(29),(31)式给出为

$$\xi_1=a^3\xi_0,$$
$$\xi_2=1+a^4\xi_0,$$
$$\xi_3=-a^1\xi_0,$$
$$\xi_4=0,$$
$$a^3\xi_1+a^4\xi_2-B\xi_0+G=a^4. \tag{38}$$

当取

$$G=0, \tag{39}$$

则有

$$\xi_0=0, \xi_1=\xi_3=\xi_4=0, \xi_2=1. \tag{40}$$

若取

$$G=\frac{1}{2}\{(a^1)^2-(a^3)^2-(a^4)^2\}, \tag{41}$$

则有

$$\xi_0=1, \xi_1=a^3, \xi_2=1+a^4, \xi_3=-a^1, \xi_4=0. \tag{42}$$

(40)式满足(35)式的前两式,因此,由定理 1 知,(40)式为系统的准对称变换. 而(42)式不满足方程(35)的前两式,因此,(42)式对应的变换不是系统的准对称变换.

[1] A.E. Noether, Nachr Akad Wiss Cöttinger Math Phys K Ⅰ, Ⅱ (1918), 235.

[2] Y. Zhang, F. X. Mei, *Applied Mathematics and Mechanics*, **21** (2000), 53 (in Chinese) [张毅、梅凤翔, 应用数学和力学, **21** (2000), 53].

[3] F.X. Mei, R.C. Shi, Y.F. Zhang, H.B. Wu, Dynamics of Birkhoff System (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬, Birkhoff 系统动力学(北京理工大学出版社,北京, 1996)].

[4] F.X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **41** (1996), 641 (in Chinese) [梅凤翔, 科学通报, **41** (1996), 641].

[5] F.X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **43** (1998), 1937 (in Chinese) [梅凤翔, 科学通报, **43** (1998), 1937].

[6] F.X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **44** (1999), 318 (in Chinese) [梅凤翔, 科学通报, **44** (1999), 318].

[7] F.X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **44** (1999), 2262 (in Chinese) [梅凤翔, 科学通报, **44** (1999), 2262].

[8] J.L. Fu, X.M. Wang, *Acta Physics Sinica*, **49** (2000), 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民, 物理学报, **49** (2000), 1023].

[9] S.K. Luo, J.L. Fu, X.W. Chen, *Acta Physics Sinica*, **50** (2001), 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜, 物理学报, **50** (2001), 383].

[10] S.K. Luo, *Chinese Physics*, **10** (2001), 271.

[11] Y. Zhang, F.X. Mei, *Journal of Beijing Institute of Technology*, **7** (1998), 19.

[12] F.X. Mei, Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999) (in Chinese) [梅凤翔, 李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社, 北京, 1999)].

NOETHER'S THEORY OF BIRKHOFF SYSTEMS WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

ZHANG HONG-BIN

(*Departement of Physics*, *Chaohu Teachers College*, *Chaohu* 238000, *China*)

(Received 31 March 2001; revised manuscript received 28 April 2001)

ABSTRACT

Noether's theory of Birkhoff systems with unilateral constraints by introducing the quasi-symmetry of infinitesimal transformations of the transformation group G_r is presented and an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, Birkhoff systems with unilateral constraints, conserved quantity, symmetry, Noether's theorem

PACC: 0316