第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1884-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.10, October, 2001

用不变量理论精确求解中子自旋与引力的相互作用*

沈建其[1)] 朱红毅[1)2)] 李 军[2)]

[1)](浙江近代物理中心及浙江大学物理学系,杭州 310027)

[2)](浙江大学现代光学仪器国家重点实验室,光及电磁波研究中心,杭州 310027)

(2001 年 1 月 14 日收到;2001 年 5 月 10 日收到修改稿)

提出在中子-引力干涉实验中,除了 Aharonov-Carmi(A-C)效应外,还存在中子自旋与引力的相互作用.运用与不变量有关的幺正变换方法,得到了中子自旋与引力相互作用含时薛定谔方程的精确解和几何相因子.

关键词:自旋-引力相互作用,几何相因子,含时薛定鄂方程,不变量理论

PACC:1110,0240,0365

1 引 言

由 Berry 的绝热几何相理论[1],我们知道在 Aharonov-Bohm(A-B)效应中电子波叠加的相差(扣除动力学相位)就是不可积的几何相位,这大大加深了对 A-B 效应的理解,即 A-B 效应的本质与几何和整体性有关.由于引力与电磁在很多方面可以作类比,Aharonov,Garmi 提出惯性力的矢量势的几何效应[2],而 Anandan,Dresden,Sakurai 等分别提出与引力有关的量子干涉效应[3].根据等效原理,它们在实质上是等价的.在转动的参考系上,粒子受到惯性离心力和科里奥利力,它们分别类似于电场力和磁场力,从而在转动参考系上运动的物质波也会存在一个不可积相因子,这称为 Aharonov-Carmi(A-C)效应,或称引力 A-B 效应.Tsai,Neilson 及高孝纯等计算了这一几何相[4].Overhauser,Colella,Werner 等用中子干涉实验证实了这一效应的存在[5].A-C 效应实际上是运动物质的动量与非惯性系的相互作用,对于具有自旋的粒子(如中子),还存在自旋与非惯性系的相互作用[6].尽管这一作用与 A-C 效应属于同一实质(都来源于运动物质所受到的科里奥利力),但上面提到的 A-C 效应并不包含这部分相互作用,且由于自旋的非经典性,研究这一相互作用极有必要,对于分析自旋本质亦有一定的意义.

中子自旋与变化的引力(根据等效原理,这里指科里奥利力,转动参考系的角速度相当于引力磁场)的相互作用也会导致几何相因子,因此在中子干涉实验中需要区别 A-C 效应几何相和自旋-引力相互作用几何相.Berry 的理论研究的是绝热含时情形[1],1991 年高孝纯等在 Lewis 和 Riesenfeld(L-R)的不变量理论[7]的基础之上,提出了用于研究非绝热、非循回过程的不变量理论即与不变量有关的幺正变换方法[8,9].该方法回避 L-R 理论中的含时不变量的本征态,代之以不含时不变量的本征态,并且可用不变量的含时系数把几何相因子表示出来,将 L-R 的形式理论发展成为可实际用于研究几何相的重要理论.这一方法是研究含时量子系统和含时背景中的场论[9-11]的重要工具.本文就用这一理论方法研究中子自旋与引力的相互作用.

2 中子自旋与引力的相互作用

在转动参考系中有一粒子,相对于参考系的速度为 v,该粒子受到惯性离心力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ine}}$ 和科里奥利力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}$,其中

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ine}} = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{ine}} = 0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 0, \tag{2}$$

方程(2)表明 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ine}}$ 是保守力,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}$ 是无源的,因此可以引入矢势 $\boldsymbol{a}$ 和标势 a_0,其中[12]

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ine}} = -m\nabla a_0,\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2m\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}), \tag{3}$$

由此不难得到粒子运动的拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - ma_0 + 2m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}, \tag{4}$$

从而哈密顿量为

* 国家自然科学基金(批准号:30000034)和浙江省自然科学基金(批准号:197027)资助的课题.

$$H = \frac{p^2}{2m} + ma_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2. \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 为轨道角动量.对于有自旋的粒子,还存在类似磁矩与磁场的相互作用.比较(5)式与带电粒子在电磁场中的哈密顿量形式可以得到自旋与引力磁场 $\nabla \times \boldsymbol{a}$ 的相互作用哈密顿量为 $H_{s-c} = \boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})$.如果粒子是中子,$S = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$,则

$$H_{s-c} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{\sigma}$ 为 Pauli 矩阵.

由(6)式知,中子自旋与引力的相互作用就是自旋与转动系角速度的耦合.如果转动系的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 含时,那么固定在参考系上的中子波就会获得与自旋有关的几何相因子.通过研究自旋方向相反的中子的引力干涉实验,应该可以证明这一几何相因子的存在.

3　精确求解中子自旋与含时角速度相互作用的薛定谔方程

中子自旋-含时角速度相互作用的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = H_{s-c}(t)\Phi, \quad (7)$$

设 $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0(t)(\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \sin\theta(t)\sin\varphi(t), \cos\theta(t))$,及 $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2$,可将(6)式的 $H_{s-c}(t)$ 化作

$$H_{s-c}(t) = \omega_0(t)\Big[\frac{1}{4}\sin\theta\exp(-\mathrm{i}\varphi(t))\sigma_+ + \frac{1}{4}\sin\theta\exp(\mathrm{i}\varphi(t))\sigma_- + \frac{1}{2}\cos\theta\sigma_3\Big]. \quad (8)$$

根据 R-L 不变量理论,需要构造一个不变量 $I(t)$,使之满足不变量方程

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}}[I(t), H_{s-c}] = 0. \quad (9)$$

由于 $\sigma_{\pm}$ 和 σ_3 构成完备的代数,且哈密顿量 H_{s-c} 是 Pauli 矩阵的线性叠加,所以不变量 $I(t)$ 也一定是 Pauli 矩阵的线性叠加,不妨设

$$I(t) = \frac{1}{4}\sin\lambda(t)\exp(-\mathrm{i}\gamma(t))\sigma_+ + \frac{1}{4}\sin\lambda(t) \cdot \exp(\mathrm{i}\gamma(t))\sigma_- + \frac{1}{2}\cos\lambda(t)\sigma_3. \quad (10)$$

将(8)式,(10)式代入(9)式,得到关于 $\lambda(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的辅助方程

$$\dot{\lambda}(t) = \omega_0(t)\sin\theta\sin(\varphi - \gamma),$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2}\omega_0(t)(\cos\theta - \sin\theta\cot\lambda\cos(\varphi - \gamma)). \quad (11)$$

设不变量本征态为 $|n, t\rangle_I$,根据 L-R 理论[7],含时薛定谔方程的解与不变量本征态 $|n, t\rangle_I$ 只相差一个含时相位因子,它的表式是 $\exp\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}\phi_n(t)\Big)$,其中

$$\phi_n(t) = \int_0^t {}_I\Big\langle n, t' \Big| H_{s-c}(t') - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial T'} \Big| n, t'\Big\rangle_I \mathrm{d}t', \quad (12)$$

于是含时薛定谔方程(7)的特解为

$$\Phi_n(t) = \exp\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}\phi_n(t)\Big)|n, t\rangle. \quad (13)$$

为了得到不变量 $I(t)$ 的本征态 $|n, t\rangle_I$ 及 $\phi_n(t)$,利用与不变量有关的幺正变换方法[8],将含时的不变量 $I(t)$ 变为不含时的不变量 I_0,即

$$I_0 = V^+(t)I(t)V(t), \quad (14)$$

其中

$$V(t) = \exp\Big(\frac{1}{2}\beta\sigma_+ - \frac{1}{2}\beta^*\sigma_-\Big),$$

$$V^+(t) = \exp\Big(\frac{1}{2}\beta^*\sigma_- - \frac{1}{2}\beta\sigma_+\Big). \quad (15)$$

由于

$$I(t) = \frac{1}{4}\sin\lambda(t)\exp(-\mathrm{i}\gamma(t))\sigma_+ + \frac{1}{4}\sin\lambda(t) \cdot \exp(\mathrm{i}\gamma(t))\sigma_- + \frac{1}{2}\cos\lambda(t)\sigma_3 = \frac{a}{2}\sigma_+ + \frac{a^*}{2}\sigma_- + \frac{b}{2}\sigma_3,$$

则由 Glauber 公式,得到

$$I_0 = I(t) + \frac{1}{1!}\Big[\frac{1}{2}\beta^*\sigma_- - \frac{1}{2}\beta\sigma_+, I(t)\Big] + \frac{1}{2!}\Big[\frac{1}{2}\beta^*\sigma_- - \frac{1}{2}\beta\sigma_+, \Big[\frac{1}{2}\beta^*\sigma_- - \frac{1}{2}\beta\sigma_+, I(t)\Big]\Big] + \cdots$$

其中

$$\Big[\frac{1}{2}\beta^*\sigma_- - \frac{1}{2}\beta\sigma_+, I(t)\Big] = \beta b\frac{\sigma_+}{2} + \beta^* b\frac{\sigma_-}{2} - 2(\beta^* a + \beta a^*)\frac{\sigma_3}{2}, \quad (16)$$

在 $I(t)$ 中 $\frac{\sigma_+}{2}$,$\frac{\sigma_-}{2}$ 和 $\frac{\sigma_3}{2}$ 的系数构成一个列矢量 $\begin{pmatrix} a \\ a^* \\ b \end{pmatrix}$,$I(t)$ 与 $\beta^*\frac{\sigma_-}{2} - \beta\frac{\sigma_+}{2}$ 对易后,系数变为 $\begin{pmatrix} \beta b \\ \beta^* b \\ -2(\beta^* a + \beta a^*) \end{pmatrix}$,则对易后的系数列矢量相当于一个矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta^* \\ -2\beta^* & -2\beta & 0 \end{pmatrix}$ 作用到列矢量

$\begin{pmatrix} a \\ a^* \\ b \end{pmatrix}$上而得到.进一步可以证明 Glauber 公式中各和式通项系数列矢量为$\frac{A^n}{n!}\begin{pmatrix} a \\ a^* \\ b \end{pmatrix}$.分别计算第奇数项$\frac{A^n}{n!}$之和及第偶数项$\frac{A^n}{n!}$之和,发现当幺正变换 V 的含时参数取为

$$\beta = -\frac{\lambda}{2}\exp(-\mathrm{i}\gamma),\beta^* = -\frac{\lambda}{2}\exp(\mathrm{i}\gamma) \quad (17)$$

时,I_0 中$\frac{\sigma_\pm}{2}$的系数为零,$\frac{\sigma_3}{2}$的系数为 1,即经幺正变换后得到的 I_0 不含时,

$$I_0 = \frac{\sigma_3}{2}. \quad (18)$$

I_0 的属于本征值$\pm\frac{1}{2}$的本征态为$|\pm\rangle$,于是含时薛定谔方程(7)的特解为

$$\Phi_n(t) = \exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\phi_n(t)\right]V(t)\,|\,n\rangle, \quad (19)$$

其中$|n> = |\pm>$,分别相应于本征值$\pm\frac{1}{2}$的态.相位 $\phi_n(t)$包含动力学相位

$$\phi_d(t) = \int_0^t\langle n\,|\,V^+(t')H_{\mathrm{s-c}}(t')V(t')\,|\,n\rangle\mathrm{d}t' \quad (20)$$

和几何相位

$$\phi_g(t) = -\int_0^t\langle n\,|\,V^+(t')\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}V(t')\,|\,n\rangle\mathrm{d}t'. \quad (21)$$

重复类似于前面计算$\frac{A^n}{n!}\begin{pmatrix} a \\ a^* \\ b \end{pmatrix}$的过程及利用 Backer-Campbell-Hausdorff 公式[13],计算得到的中子自旋与含时引力相互作用的动力学相位和几何相位为

$$\phi_{d\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\int_0^t\omega_0(t')(\cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta\cos(\gamma-\varphi))\mathrm{d}t', \quad (22)$$

$$\phi_{g\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\int_0^t\dot{\gamma}(t')(1-\cos\lambda(t'))\mathrm{d}t'. \quad (23)$$

(19),(22),(23)式便是薛定谔方程(7)的精确解和相位表式.

4 讨 论

1.虽然自旋是量子力学概念,无经典类比,但自旋与经典的转动参考系之间却仍可能会有相互作用.运用经典理论,设存在一转动角速度与位置有关的非惯性参考系,相对于它运动的物质的动量密度是 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$,根据(1)式,科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2\int_V\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau', \quad (24)$$

设动量密度分布在很小的区域,将 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}')$在此小区域内任意一点展开取到一阶近似,即有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2\int_V\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\omega}_0\mathrm{d}\tau' + 2\int_V\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}'=0))\mathrm{d}\tau', \quad (25)$$

利用关系式 $\boldsymbol{r}'\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})) = \nabla(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})) - (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$等,(25)式右边第二项可以进一步化成

$$f_{\mathrm{cor}} = -2\nabla\times\left\{\boldsymbol{\omega}_i\int_V\frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')r_i' - p_i(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}']\mathrm{d}\tau'\right\} = -\nabla\times[\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})], \quad (26)$$

于是总角动量为 $\boldsymbol{J}$ 的粒子在外场$\boldsymbol{\omega}$ 中受力表式为$f = (\boldsymbol{J}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = \nabla(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega})$,从而相互作用哈密顿量为

$$H = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}. \quad (27)$$

对于自旋粒子,$\boldsymbol{J}$ 是否包含着自旋 S 呢?分析这一问题对于研究自旋与经典的转动系的相互作用及自旋的惯性性质有重要意义.

2.由于地球内部物质运动、潮汐、洋流和大气运动都可能会导致地球自转角速度发生变化,所以用中子引力干涉实验测定自旋-科里奥利力相互作用导致的几何相,可以获得有关地球角速度变化的信息,进一步可用于研究地球内部物质和大气的运动,因而在实践上有应用价值.

3.除了上面提到的自旋与科里奥利力的相互作用外,关于自旋与引力的相互作用,实际还存在自旋与引力波幅的耦合.将引力理论中粒子短程线方程作弱场近似,除了获得粒子质量与标量势 h_{00}、粒子速度与矢量势 $\boldsymbol{h}(h_{01},h_{02},h_{03}$的相互作用外,还得到粒子自旋 S 与引力磁场$\nabla\times\boldsymbol{h}$ 的相互作用.对于引力横波,也会存在中子自旋与引力波幅(h_{11},h_{12},h_{22})的耦合,足够强的引力波与中子自旋的相互作用可导致可观察的几何相.这在理论和实验研究(如引力波探测)上都有意义.关于这方面的研究正在进行当中.

[1] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser*, **A392** (1984), 45 ;B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 2167.
[2] Y. Aharonov, G. Carmi, *Found Phys.*, **3** (1973), 493.
[3] J. Anandan, *J. Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1448 ;M. Dresden *et al.*, *Phys. Rev.*, **D20** (1979), 1846 ;J. J. Sakurai, *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 2993.
[4] C. H. Tsai, D. Neilson, *Phys. Rev.*, **A37** (1988), 619 ;X. C. Gao, *High Energy Physics and Nuclear Physics*, **14** (1990), 704 (in Chinese) [高孝纯,高能物理与核物理,**14**(1990),704].
[5] A. W. Overhauser, R. Colella, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 1237 ; S. A. Werner *et al. Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979), 1103.
[6] B. Mashhoon xxx. lanl. gov gr-qc/0003022 ;B. Mashhoon, *Phys. Lett.*, **198** (1995), 9.
[7] H. Rewis, W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1458.
[8] X. C. Gao, J. B. Xu, T. Z. Qian, *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 7016 ;J. Fu, X. C. Gao, J. B. Xu, X. B. Zou, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 1011 (in Chinese) [符建、高孝纯、许晶波、邹旭波,物理学报,**48**(1999),1011] ;X. C. Gao, J. Gao, J. Fu, *Acta Physica Sinica*, **45** (1996), 606 (in Chinese) [高孝纯、高隽、符建,物理学报,**45**(1996),606].
[9] J. B. Xu, X. C. Gao, *Chinese Science Bulletin*, **39** (1994), 1084 (in Chinese) [许晶波、高孝纯,科学通报,**39**(1994),1084] ;X. C. Gao, J. B. Xu, T. Z. Qian, *Phys. Lett.*, **A152** (1991), 449 ;J. Fu, X. C. Gao, J. B. Xu, X. B. Zou, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 606 (in Chinese) [符建、高孝纯、许晶波、邹旭波,物理学报,**47**(1998),606].
[10] B. X. Tao, *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition), **8** (1999), 481.
[11] X. C. Gao, J. Fu, J. Q. Shen, *Eur. Phys. J.*, **C13** (2000), 527.
[12] H. Z. Li, Global Properties of Simple Physical Systems (Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1998), 66 (in Chinese) [李华钟,简单物理系统的整体性(上海科学技术出版社,1998),66].
[13] J. Wei, E. Norman, J. Math. *Phys.*, (N. Y) **4** (1963), 575.

EXACT SOLUTIONS FOR THE INTERACTION BETWEEN NEUTRON SPIN AND GRAVITATION BY USING INVARIANT THEORY*

SHEN JIAN-QI[1) ZHU HONG-YI[1)2) LI JUN[2)

[1) (*Zhejiang Institute of Modern Physics and Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

[2) (*State key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Center for Optical and Electromagnetic Research, College of Information Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

(Received 14 January 2001 ; revised manuscript received 10 May 2001)

ABSTRACT

The existence of the interaction between the neutron spin and the gravitation in the experiment of neutron-gravitation interferometry, in addition to the Aharonov-Carmi effect (gravitational A-B effect), is proposed in the paper. The authors obtain the exact solutions to the time-dependent Schrödinger equation describing this interaction by making use of the invariant-related unitary transformation formulation.

Keywords : spin-gravitation interaltion, geometrical phase, time-dependent Schrödinger equation, in variant theory

PACC : 1110, 0240, 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 30000034) and by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 197027).