第 50 卷 第 12 期 2001 年 12 月
1000-3290/2001/50(12)/2289-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50,No.12,December,2001

相对论 Birkhoff 系统动力学研究*

傅景礼1) 陈立群1) 罗绍凯2) 陈向炜2) 王新民2)
1)(上海大学上海市应用数学与力学研究所,上海 200072)
2)(商丘师范学院数学力学与数学物理研究所,商丘 476000)
(2000 年 11 月 23 日收到;2001 年 5 月 19 日收到修改稿)

给出相对论系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组、Pfaff 作用量、Pfaff-Birkhoff 原理、Birkhoff 方程;研究相对论动力学系统的 Birkhoff 表示方法;根据在无限小变换下相对论 Pfaff 作用量的不变性和相对论 Birkhoff 方程的不变性,得到相对论 Birkhoff 系统的 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论;研究相对论 Birkhoff 系统的代数结构和 Poisson 积分方法.

关键词:相对论,Birkhoff 系统,Noether 对称性,Lie 对称性,代数结构,Poisson 积分
PACC:0316,0412

1 引 言

Birkhoff 动力学的研究始于 1927 年美国数学家 Birkhoff 的工作[1].1978 年美国物理学家 Santilli 考虑时间 t 将该方程修改后命名为 Birkhoff 方程[2],并将该方程引入力学领域,研究了完整约束系统的动力学问题,从此 Birkhoff 方程在数学力学研究领域受到重视.1992 年我国数学力学家梅凤翔利用 Birkhoff 方程研究了非完整系统的动力学问题[3,4],并给出了 Birkhoff 系统的 Noether 理论[5],Poisson 理论[6] 及运动稳定性理论[7,8],构筑了 Birkhoff 系统动力学的理论框架[9].Birkhoff 系统动力学比 Hamilton 力学更为一般[10],Hamilton 力学理论犹如一颗参天大树,已经根深叶茂,成为当今非线性科学、近代物理领域中一个最富成果而又生机勃勃的研究方向[11,12].相信 Birkhoff 系统动力学理论在非线性科学、近代物理领域中也理应扮演重要角色.近 10 余年来相对论分析力学的研究取得了丰硕成果[13—19].本文将 Birkhoff 动力学的研究从经典力学扩展到高速运动的相对论力学,建立了相对论力学与 Birkhoff 动力学的交叉理论,为 Birkhoff 动力学进入近代物理研究领域奠定基础.

2 相对论 Pfaff-Birkhoff 原理与相对论 Birkhoff 方程

定义相对论性 Pfaff 作用量

$$A^* = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{R_\nu^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\dot a^\nu - B^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\Big\}\mathrm{d}t \qquad (\nu = 1,\cdots,2n). \tag{1}$$

本文采用 Einstein 求和约定.式中 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(a^1,\cdots,a^n)$,$m_i$ 为 i 质点的相对论性质量

$$m_i = m_{0i}/\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2} \qquad (i = 1,\cdots,N), \tag{2}$$

m_{0i} 为 i 质点的经典质量,$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i(t,\boldsymbol{a})$ 为 i 质点的速度,c 为光速.

类同于文献[20],不难证明在相对论力学中 d 与 δ 满足交换关系,则等时变分原理

$$\delta A^* = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\Big(\frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu^*}{\partial a^\nu} - \frac{\partial R_\mu^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}\Big)\dot a^\nu - \Big(\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu^*}{\partial t} + \frac{\partial R_\mu^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\Big)\Big\}\cdot\delta a^\mu \mathrm{d}t = 0$$
$$(\nu,\mu = 1,\cdots,2n;\ i = 1,\cdots,N), \tag{3}$$

带有交换关系

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)和河南省自然科学基金(批准号:984053100)资助的课题.

$$\mathrm{d}\delta a^{\nu} = \delta \mathrm{d} a^{\nu} \tag{4}$$

及端点条件

$$\delta a^{\nu}\Big|_{t=t_1} = \delta a^{\nu}\Big|_{t=t_2} \tag{5}$$

称为相对论 Pfaff-Birkhoff 原理.式中 B^* 为相对论 Birkhoff 函数,R_{ν}^* 为相对论 Birkhoff 函数组.令

$$\begin{aligned}\tilde{B}^* &= \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}) = B^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}),\\ \tilde{R}_{\nu}^* &= \tilde{R}_{\nu}^*(t,\boldsymbol{a}) = R_{\nu}^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}),\end{aligned} \tag{6}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\mu}} &= \frac{\partial B^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial B^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}},\\ \frac{\partial \tilde{R}_{\nu}^*}{\partial a^{\mu}} &= \frac{\partial R_{\nu}^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial R_{\nu}^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}},\\ \frac{\partial \tilde{R}_{\nu}^*}{\partial t} &= \frac{\partial R_{\nu}^*}{\partial t} + \frac{\partial R_{\nu}^*}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t},\end{aligned} \tag{7}$$

那么,原理(3)式可表为

$$\delta A^* = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial \tilde{R}_{\nu}^*}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu} - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial t}\right)\right\}\delta a^{\mu}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{8}$$

由积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,δa^{μ} 的独立性,得到系统的相对论 Birkhoff 方程

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*\dot{a}^{\nu} - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^* = \left(\frac{\partial \tilde{R}_{\nu}^*}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial a^{\nu}}\right), \tag{9}$$

$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*$称为相对论 Birkhoff 张量.(9)式表示成逆变形式

$$\dot{a}^{\mu} = \tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{R}_{\nu}^*}{\partial t}\right), \tag{10}$$

式中

$$\tilde{\Omega}^{*\mu\nu} = \left|\left(\frac{\partial \tilde{R}_{\beta}^*}{\partial a^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{R}_{\alpha}^*}{\partial a^{\beta}}\right)^{-1}\right|^{\mu\nu} \quad (\alpha,\beta = 1,\cdots,2n) \tag{11}$$

为相对论 Birkhoff 逆变张量.一般假设

$$\det(\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*) \neq 0. \tag{12}$$

若 $\tilde{R}_{\nu}^*$,$\tilde{B}^*$ 都不显含时间 t,则相对论 Birkhoff 方程(9)为自治的.有如下形式:

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial \tilde{B}^*(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} = 0. \tag{13}$$

如果仅 $\tilde{R}_{\nu}^*$ 不显含时间 t,则相对论 Birkhoff 方程(9)为半自治的,有形式

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} = 0. \tag{14}$$

3 相对论动力学系统的 Birkhoff 表示

3.1 相对论完整力学系统的 Birkhoff 表示

研究 N 个质点构成的力学系统,第 i 个质点受到主动力 $\boldsymbol{F}_i$,如果系统只受有理想完整约束或不受约束,我们引入相对论性的广义动能函数[13,14]

$$T^* = m_{0i}c^2\left(1 - \sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\right). \tag{15}$$

引入凝固偏导数和凝固导数记号,令 $\Pi/\Pi\dot{q}_s$,$\Pi/\Pi q_s$ 分别表示把质量当作常量时对 $\dot{q}_s$,q_s 的偏导数,D/Dt 表示把质量当作常量时对时间 t 的导数.可得到相对论完整约束系统凝固导数形式的运动方程[21]

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\Pi T^*}{\Pi\dot{q}_s} - \frac{\Pi T^*}{\Pi q_s} = 2Q_s + 2\Psi_S \quad (s = 1,\cdots,N),$$

$$Q_s = \boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \quad \Psi_s = -\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}. \tag{16}$$

(16)式可表为显式

$$\ddot{q}_s = g_s(q_k,\dot{q}_k,t) \quad (s,k = 1,\cdots,n). \tag{17}$$

令

$$a^s = q_s, \quad a^{n+1} = \dot{q}_s, \tag{18}$$

方程(17)可表为标准一阶形式

$$\dot{a}^{\nu} = \sigma^{\nu},\ \sigma^s = a^{n+s},\ \sigma^{n+s} = g_s(q_k,\dot{q}_k,t). \tag{19}$$

要使方程有相对论 Birkhoff 形式(9),即

$$\dot{a}^{\mu} = \sigma^{\mu} = \tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*\dot{a}^{\nu} - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial t}\right) = 0, \tag{20}$$

则有

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*\dot{a}^{\nu} = \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial \tilde{R}_{\mu}^*}{\partial t}. \tag{21}$$

对于给定的 $\tilde{B}^*$,无论 $\tilde{R}_{\mu}^*$ 是否显含时间 t,方程(21)总可表为 Cauchy-Ковапевская 型的[22].根据 Cauchy-Ковапевская 定理,方程(21)的解总是存在的.因此,一般相对论完整系统总有 Birkhoff 表示.

我们知道,相对论完整保守系统可表为正则形

式[14]

$$\dot{q}_s = \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial q_s}. \tag{22}$$

取 $\tilde{B}^*$ 为相对论 Hamilton 函数，则(22)式自然有 Birkhoff 表示. 即相对论完整动力学系统都可纳入 Birkhoff 系统.

3.2 相对论非完整动力学系统的 Birkhoff 表示

假定系统除受有完整约束外，还受有非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{23}$$

则系统的运动可表为凝固导数形式的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\Pi T^*}{\Pi \dot{q}_s} - \frac{\Pi T^*}{\Pi q_s} = 2Q_s + 2\Psi_S + 2\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{24}$$

在运动方程积分之前，可由方程(23)和(24)求出乘子 λ_β 作为 $q, \dot{q}, t$ 的显函数[23,24]，记作

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(q_s, \dot{q}_s, t), \tag{25}$$

则方程(24)可表为显式

$$\ddot{q}_s = \omega_s(q_k, \dot{q}_k, t). \tag{26}$$

方程(26)为非完整系统(23)和(24)式相应完整系统的运动方程. 如果初始条件满足约束方程(23)，即 $f_\beta(q_s^0, \dot{q}_s^0, t^0) = 0$,，那么方程(26)给出所论非完整系统的运动. 因此，相对论非完整系统的 Birkhoff 化问题，转化为相应完整系统(26)式的 Birkhoff 化问题. 那么，一切相对论非完整系统的运动方程都有 Birkhoff 表示.

4 相对论 Birkhoff 系统的积分理论

4.1 相对论 Birkhoff 系统的 Noether 理论

相对论 Birkhoff 系统的 Noether 理论分为正问题和逆问题. 对于正问题，我们引入无限小变换，

$$t^* = t + \varepsilon f(t, \boldsymbol{a}), \quad a^{*\mu} = a^\mu + \varepsilon F_\mu(t, \boldsymbol{a}), \tag{27}$$

式中 ε 为小参数，f 和 F_μ 为无限小变换生成元. 将(27)式代入原理(8)式并注意到积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性，得到

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right)\right\} \times (F_\mu - \dot{a}^\mu f) = 0. \tag{28}$$

此式可表为

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)F_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)f + \tilde{R}_\mu^*\dot{F}_\mu^* - \tilde{B}^*\dot{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{R}_\mu^* F_\mu - \tilde{B}^* f)\right\} = 0. \tag{29}$$

引入规范函数 $P = P(t, \boldsymbol{a})$，在(29)式中相加并相减 $\varepsilon\dot{P}$，得到

$$\varepsilon\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{R}_\mu^* F_\mu - \tilde{B}^* f + P) + \dot{P} + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)F_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)f + \tilde{R}_\mu^*\dot{F}_\mu - \tilde{B}^*\dot{f}\right\} = 0. \tag{30}$$

由不变性条件(30)式立即得到，对于相对论 Birkhoff 系统(9)式，如果无限小变换生成元 F_μ, f 和规范函数 P 满足如下关系：

$$\dot{P} + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)F_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)f + \tilde{R}_\mu^*\dot{F}_\mu - \tilde{B}^*\dot{f} = 0, \tag{31}$$

那么系统存在如下守恒量：

$$\tilde{R}_\mu^* F_\mu - \tilde{B}^* f + P = \text{const}. \tag{32}$$

于是有

定理 1 对于相对论 Birkhoff 系统(9)式，如果无限小变换(27)式的生成元 F_μ, f 和规范函数 P 满足条件(31)式，则系统存在形如(32)式的守恒量.

可见，对于给定的 $\tilde{B}^*, \tilde{R}_\nu^*$，可由(31)式找到无限小变换生成元 F_μ, f 和规范函数 P，然后由(32)式找到系统的守恒量.

对于逆问题，我们假设相对论 Birkhoff 系统有 r 个彼此独立的第一积分

$$\tilde{I}^* = \tilde{I}^*(t, \boldsymbol{a}) = I^*(m_i, (t, \boldsymbol{a}), t, \boldsymbol{a}) = \text{const}. \tag{33}$$

试由该积分找到相应 Noether 对称性.

将(33)式对时间 t 求导数得到

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{I}^*}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{34}$$

再将(9)式等号两端乘以 $\bar{F} = F_\mu - \dot{a}^\nu f$ 并对 μ 求和，再将结果与(34)式相加，得到

$$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu + \left\{\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\right.$$

$$-\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)\Bigg\}(F_\mu-\dot{a}^\mu f)=0. \tag{35}$$

由(35)式中 $\dot{a}^\nu$ 的系数为零,得到

$$\frac{\partial\tilde{I}^*}{\partial a^\nu}+\left(\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial a^\nu}\right)F_\mu$$

$$+\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}+\frac{\tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right)f=0. \tag{36}$$

若相对论 Birkhoff 方程非退化,即

$$\det(\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu})=\det\left(\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial a^\nu}\right)\neq 0,$$

故可由(35)式解得到

$$F_\mu=\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\left\{\frac{\partial\tilde{I}^*}{\partial a^\nu}+\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right)f\right\}. \tag{37}$$

令积分(33)式等于守恒量(32)式.即

$$\tilde{I}^*=I^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})=\tilde{R}^*_\mu F_\mu-\tilde{B}^*f+P, \tag{38}$$

那么有

定理 2 如果已知相对论 Birkhoff 系统(9)式的第一积分,且选定具体的规范函数 P 后,由(37),(38)式可确定该系统的无限小变换生成元 f,F_μ,它们对应于相对论 Birkhoff 系统(9)式的 Noether 对称性变换.

4.2 相对论 Birkhoff 系统的 Lie 对称性理论

相对论 Birkhoff 系统的 Lie 对称性理论见文献[25],本文给出一些结论.

在(27)式的无限小变换下,引入无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)}=f\frac{\partial}{\partial t}+F_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu}, \tag{39}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{F}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{f})\frac{\partial}{\partial\dot{a}^\mu}. \tag{40}$$

由相对论 Birkhoff 方程(9)在无限小变换下的不变性,可得到相对论 Birkhoff 系统的确定方程

$$\dot{F}_\mu-\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right)\dot{f}$$

$$=X^{(0)}\left[\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right)\right]. \tag{41}$$

如果无限小变换(27)式的生成元 f,F_μ 满足确定方程(41),就称变换(27)式是 Lie 对称的.那么有

定理 3 对于满足确定方程(41)的无限小变换生成元 f,F_μ,如果存在满足

$$X^{(1)}(\tilde{R}^*_\mu\dot{a}^\nu-\tilde{B}^*)+(\tilde{R}^*_\mu\dot{a}^\mu-\tilde{B}^*)\dot{f}+\dot{P}=0 \tag{42}$$

的规范函数 P,那么相对论 Birkhoff 系统存在如下守恒量:

$$\tilde{I}^*=\tilde{R}^*_\mu F_\mu-\tilde{B}^*f+P=\text{const}. \tag{43}$$

对于逆问题,我们有

定理 4 如果已知相对论 Birkhoff 系统(9)式的 r 个独立的第一积分,可求得该系统 Noether 对称性变换的生成元 f,F_μ.若 f,F_μ 满足确定方程(41),那么,该系统是与第一积分对应的 Lie 对称性变换,否则不是 Lie 对称性变换.

4.3 积分相对论 Birkhoff 方程的场方法

关于此问题的研究见文献[26].

5 相对论 Birkhoff 系统的代数结构与 Poisson 积分方法

5.1 相对论 Birkhoff 方程的代数结构

对于自治形式或半自治形式的相对论 Birkhoff 方程(13)和(14),将余切丛 T^*M 上的某函数 $\tilde{A}^*(\boldsymbol{a})$ 按(13)或(14)式求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{\tilde{A}}^*(\boldsymbol{a})=\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial a^\mu}\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}\underline{\underline{\mathrm{def}}}\tilde{A}^*\cdot\tilde{B}^*. \tag{44}$$

类似于文献[27]的证明,它满足右分配律、左分配律、标律,还满足反对称性和 Jacobi 恒等式.那么,我们得到

定理 5 自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 方程(13)和(14),具有相容代数结构和 Lie 代数结构.

对于非自治形式的相对论 Birkhoff 方程(10),将余切丛 T^*M 上的某函数 $\tilde{A}(a)$ 按(10)式求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{\tilde{A}}^*(\boldsymbol{a})=\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial a^\mu}\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\nu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right)\underline{\underline{\mathrm{def}}}\tilde{A}^*\circ\tilde{B}^*. \tag{45}$$

类似于文献[27]的证明,它不满足右分配律、标律.那么我们得到

定理 6　非自治形式的相对论 Birkhoff 方程(10)没有相容代数结构[27].

研究一种特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 系统.如果方程(10)中的相对论 Birkhoff 函数 $\tilde{B}^*$ 和相对论 Birkhoff 函数组 $\tilde{R}_\nu^*$ 还满足关系

$$\tilde{T}^{*\mu\nu}\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\nu}=\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial t},\tag{46}$$

式中

$$(\tilde{T}^{*\mu\nu})=\begin{pmatrix} T^{*11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & T^{*22} & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & T^{*2n,2n}\end{pmatrix}\tag{47}$$

为相对论性对称张量,可由(46)式确定.那么非自治形式的相对论 Birkhoff 方程(10)表为如下形式:

$$\dot{a}^\nu-\tilde{S}^{*\mu\nu}\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}=0,\quad \tilde{S}^{*\mu\nu}=\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}+\tilde{T}^{*\mu\nu}.\tag{48}$$

我们将余切丛 T^*M 上的某函数 $\tilde{A}^*(\boldsymbol{a})$ 按(48)式求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{\tilde{A}}^*(\boldsymbol{a})=\frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial a^\mu}\tilde{S}^{*\mu\nu}\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\nu}\ \underline{\mathrm{def}}\,\tilde{A}^*\tilde{B}^*.\tag{49}$$

类似于文献[27]的证明,该积满足右分配律、左分配律和标律.

由积(49)式再定义一个新积

$$\tilde{A}^*\circ\tilde{B}^*\ \underline{\mathrm{def}}\,\tilde{A}^*\tilde{B}^*-\tilde{B}^*\tilde{A}^*.\tag{50}$$

不难证明它满足 Lie 代数公理.那么有

定理 7　特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 方程(48)在积定义(49),(50)式下具有相容代数结构和 Lie 容许代数结构.

5.2　相对论 Birkhoff 系统的 Poisson 积分

自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 方程(13)和(14)具有 Lie 代数结构,因此,关于积分完整保守系统的 Poisson 理论可全部应用于这类系统.于是有

定理 8　$\tilde{I}^*(t,\boldsymbol{a})=\tilde{I}^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})=C$ 是系统(13),(14)式第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial t}+[\tilde{I}^*,\tilde{B}^*]=0,\ [\tilde{I}^*,\tilde{B}^*]=\tilde{I}^*\circ\tilde{B}^*.\tag{51}$$

(证明略).(51)式称为自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 系统关于第一积分的广义 Poisson 条件.

定理 9　自治形式的相对论 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数是系统的第一积分.

定理 10　如果自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 方程(13)和(14)有不处于相互内旋的两个第一积分 $\tilde{I}_1^*(t,\boldsymbol{a})=C_1$,$\tilde{I}_2^*(t,\boldsymbol{a})=C_2$,则它们的广义 Poisson 括号$[\tilde{I}_1^*,\tilde{I}_2^*]$也是系统的第一积分.

定理 11　如果自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 方程(13)和(14)有包含时间 t 的第一积分 $\tilde{I}^*(t,\boldsymbol{a})=C$,那么$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial t}$,$\frac{\partial^2 \tilde{I}^*}{\partial t^2}$,…都是系统的第一积分.

定理 12　如果自治形式和半自治形式的相对论 Birkhoff 方程有包含 a^ρ 的第一积分,而 $\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}$ 和 $\tilde{B}^*$ 都不含 a^ρ,则$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial a^\rho}$,$\frac{\partial^2 \tilde{I}^*}{\partial a^{\rho^2}}$,…都是系统的第一积分.

对于特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 方程(48),在积定义(49)和(50)式下具有 Lie 容许代数结构,而不具有 Lie 代数结构,那么关于积分完整保守系统的 Poisson 理论只能部分应用于这类系统.于是有

定理 13　$\tilde{I}^*(t,\boldsymbol{a})=I^*(m,(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})=C$ 是特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 系统(48)式第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial t}+\tilde{I}^*\tilde{B}^*=0,\tag{52}$$

(52)式称为特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 系统(48)式关于第一积分的广义 Poisson 条件.

定理 14　$\tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})=B^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})=C$ 是特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 系统(48)式第一积分的充要条件为

$$\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial t}=0.\tag{53}$$

定理 15　如果特殊非自治形式的相对论 Birkhoff 系统(48)式有包含 a^ρ 的第一积分,而 $\tilde{S}^{*\mu\nu}$ 和 $\tilde{B}^*$ 都不显含 a^ρ,那么$\frac{\partial \tilde{I}^*}{\partial a^\rho}$,$\frac{\partial^2 \tilde{I}^*}{\partial a^{\rho^2}}$,…都是系统的第一积分.

6 讨 论

1. 随着科学的发展,人们的研究表明,力学系统的位形空间并不一定是欧氏空间,而必是微分流形. Poincaré 提出用微分流形取代欧氏空间作为力学系统的相空间,这样 Lagrange 力学、Hamilton 力学以及非完整力学都可用近代微分几何的语言来表达[28,29].那么相对论 Birkhoff 力学也可用近代微分几何的语言来表达[30].

2. 1996 年,文献[31,32]建立了转动相对论系统分析力学的基本理论. 此后该方面的研究十分活跃[33—35].我们引入转动相对论系统的转动惯量[32]

$$I_i = I_{0i}/\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2},$$

和转动系统的相对论性广义动能函数[32]

$$T_r^* = I_{0i}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right),$$

构造转动相对论系统的 Birkhoff 函数 B^* 和 Birkhoff 函数组 R_ν^*

$$B^* = B^*(I_i(t,a),t,a),$$

$$R_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t,a),t,a),$$

可以得到转动相对论 Birkhoff 系统的动力学理论[36—38].

3. 本文的研究具有一般性. 在 $\dot{r} \ll c$ 的经典近似下

$$m_i = m_{0i}/\sqrt{1-\dot{r}_i^2/c^2} \approx m_{0i}, \quad \tilde{B}^* = B^*(m_i(t,a),t,a) = B(t,a), \quad \tilde{R}_\nu^* = R_\nu^*(m_i(t,a),t,a) = \tilde{R}_\nu^*(t,a),$$

取$\sqrt{1-\dot{r}_i^2/c^2}$幂级数展开式的前两项,系统的相对论性广义动能函数

$$T^* \approx m_{0i}c^2 - m_{0i}c^2(1-\dot{r}_i^2/2c^2) = \frac{1}{2}m_{0i}\dot{r}_i^2 = T$$

化为系统的经典动能. 本文给出经典意义下的 Birkhoff 动力学理论.

感谢北京理工大学梅凤翔先生的精心指导与热情帮助.

[1] G.D. Birkhoff, Dynamical Systems (AMS College Publ. R.I. Providence, New York, 1927).

[2] R.M. Santilli. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ (Spring-Verlag, New York, 1983).

[3] F. X. Mei, R. C. Shi, On Dynamics of Birkhoff System. Application of Modern Mathematical Theory and Method to Dynamics, Oscillation and Control (Science Press, Beijing, 1992), p. 33 (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌,关于 Birkhoff 系统动力学,现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用(科学出版社,北京,1992),第 33 页].

[4] F. X. Mei, Chaplygin Nonholonomic System, Generalized Hamilton System and Birkhoff System. Thirty Years of Nonholonomic Mechanics in China (Henan University Press, Kaifeng, 1994, p. 60 (in Chinese) [梅凤翔,Chaplygin 非完整系统、广义 Hamilton 系统与 Birkhoff 系统,中国非完整力学三十年 (河南大学出版社,开封, 1994),第 60 页].

[5] F. X. Mei, *Sci. Chin.* (A), **23** (1993), 709 (in Chinese) [梅凤翔.,中国科学(A 辑), **23** (1993), 709].

[6] F. X. Mei, *Chin. Sci. Bull.*, **38** (1993), 311 (in Chinese) [梅凤翔,科学通报, **38** (1993), 311].

[7] R.C. Shi, F. X. Mei, H.P. Zhu, *Mech. Res. Commun.*, **21** (1994), 269.

[8] F. X. Mei, *Chin. Sci. Bull.*, **40** (1995), 1947 (in Chinese) [梅凤翔,科学通报, **40** (1995), 1947].

[9] F. X. Mei, R.C. Shi, Y.F. Zhang *et al.*, Dynamics of Birkhoff System (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发等, Birkhoff 系统动力学(北京理工大学出版社,北京, 1996)].

[10] F. X. Mei, *Mechan. Pract.*, **18** (1996), 1 (in Chinese) [梅凤翔,力学与实践, **18** (1996), 1].

[11] J.B. Li, X.H. Zhao, Z.R. Liu, Theory of Generalized Hamilton System and Its Application (Science Press, Beijing, 1994) (in Chinese) [李继彬、赵晓华、刘正荣,广义 Hamilton 系统理论及其应用 (科学出版社,北京,1994)].

[12] Z.S. Yong, Advanced Quantum Mechanics (6-th) (Beijing University Press, Beijing, 1995), p.34 (in Chinese) [杨泽森,高等量子力学(第 6 版) (北京大学出版社,北京, 1995),第 34 页].

[13] S.K. Luo, *Teach. Mater. Commun.*, (5) (1987), 31 (in Chinese) [罗绍凯,教材通讯, (5) (1987), 31].

[14] S.K. Luo, *J. Xinjiang Univer.*, **5** (4) (1988), 50 (in Chinese) [罗绍凯,新疆大学学报, **5** (4) (1988), 50].

[15] S. K. Luo, Proc. Conference on Dynamics, Vibration and Control (Beijing University Press, Beijing, 1990), p. 645 (in Chinese) [罗绍凯,国际一般力学(动力学、振动与控制) (北京大学出版社,北京, 1990),第 645 页].

[16] S.K. Luo, *Shanghai J. Mech.*, **12** (1) (1991), 67 [罗绍凯,上海力学, **12** (1) (1991), 67].

[17] S.K. Luo, *College Phys.*, **11** (10) (1992), 14 (in Chinese) [罗绍凯,大学物理, **11** (10) (1992), 14].

[18] S.K.Luo, *Acta Math. Sci.*, **12** (2) (1992), 27 (in Chinese) [罗绍凯,数学物理学报, **12** (2) (1992), 27].

[19] S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **17** (1996), 683.

[20] Z. D. Xu, Thirty Years of Nonholonomic Mechanics in China (Henan University Press, Kaifeng, 1994), p.169 (in Chinese) [徐振铎，中国非完整力学三十年（河南大学出版社，开封，1994），第 169 页].

[21] J.L.Fu, S.W.Zheng, *J. Yunnan Univer.*, **22**(3)(2000), 194 (in Chinese) [傅景礼、郑世旺，云南大学学报，**22**(3)(2000)，194].

[22] R.M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics Ⅰ (Spring-Verlag, New York, 1987).

[23] F.X. Mei, Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1985) (in Chinese) [梅凤翔，非完整系统动力学基础（北京工业学院出版社，北京，1985）].

[24] J.L.Fu, *Jiangxi Sci.*, **17**(3)(1999), 137 (in Chinese) [傅景礼，江西科学，**17**(3)(1999)，137].

[25] J.L.Fu, X.M.Wang, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民，物理学报，**49**(2000)，1023].

[26] J.L.Fu, *J. Shangqiu Teachers College*, **16**(2)(2000), 10 (in Chinese) [傅景礼，商丘师专学报，**16**(2)(2000)10].

[27] F.X. Mei, Application of Lie Group and Lie Algebra to Constrained Mechanical System (2th ed.) (Science Press, Beijing, 1999), p.39 (in Chinese) [梅凤翔，Lie 群和 Lie 代数对约束力学系统的应用（第 2 版）（科学出版社，北京，1999），第 39 页].

[28] Z.H. Guo, Modern Mathematics and Mechanics (Peking University Press, Beijing, 1987) (in Chinese) [郭仲衡，近代数学和力学（北京大学出版社，北京，1987）].

[29] V.I. Arnold, Methematical Method of Classical Mechanics (Springer-Verlag, New York, 1978).

[30] J.L.Fu, X.W.Chen, S.K.Luo, *Jiangxi Science*, **18**(2)(2000), 68 [傅景礼、陈向炜、罗绍凯，江西科学，**18**(2)(2000)，68].

[31] S.K.Luo, *J. Beijing Inst. Techn.*, **16**(SI)(1996), 154 (in Chinese) [罗绍凯，北京理工大学学报，**16**(SI)(1996)，154].

[32] S.K Luo, *Appl. Math. Mech.*, **19**(1998), 45.

[33] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Appl. Math. Mech.*, **20**(1999), 1266.

[34] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Appl. Math. Mech.*, **21**(2000), 549.

[35] Y.L.Zhang, Y.F.Qiao, Y.P.Ma, *Acta Mech. Solid. Sin.*, **20**(1999), 356 (in Chinese) [张耀良、乔永芬、马永鹏，固体力学学报，**20**(1999)，356].

[36] J.H.Fang, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1028 [方建会，物理学报，**49**(2000)，1028].

[37] S.K.Luo, J.L.Fu, X.W.Chen, *Acta Phys. Sin.*, **50**(2001), 384 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜，物理学报，**50**(2001)，384].

[38] S.K.Luo, X.W.Chen, J.L.Fu, *Chin. Phys.*, **10**(2001), 271.

STUDY ON DYNAMICS OF RELATIVISTIC BIRKHOFF SYSTEMS*

FU JING-LI[1)] CHEN LI-QUN[1)] LUO SHAO-KAI[2)] CHEN XIANG-WEI[2)] WANG XIN-MIN[2)]

[1)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, *Shamghai University*, *Shanghai* 200072, *China*)

[2)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Shangqiu Teachers College*, *Shangqiu* 476000, *China*)

(Received 23 November 2000; revised manuscript received 19 May 2001)

ABSTRACT

The Birkhoffian, the Birkhoff's functions, the Pfaff action, the Pfaff-Birkhoff principle and the Birkhoff equations of relativistic Birkhoff systems are given. The Birkhoff representation of relativistic dynamical systems is studied. Then the theory of Noether symmetries and Lie symmetries of the relativistic Birkhoff systems is obtained by the invariance of relativistic Pfaff action and relativistic Birkhoff equations under infinitesimal transformations. Finally the algebraic structure and Poisson integrals for the relativistic Birkhoff systems are studied.

Keywords: relativity, Birkhoff system, noether symmetry, Lie symmetry, algebraic structure, Poisson integral

PACC: 0316; 0412

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010), and by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 984053100).