第 50 卷 第 12 期 2001 年 12 月
1000-3290/2001/50(12)/2307-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.12, December, 2001

控制离散映射系统混沌的一种方法

王改云[1)2)] 虞厥邦[1)] 古天祥[1)]

[1)](电子科技大学自动化系,成都 610054)

[2)](桂林电子工业学院计算机学系,桂林 541004)

(2001 年 5 月 9 日收到;2001 年 6 月 30 日收到修改稿)

基于延时反馈控制思想,提出了一种新的离散映象系统混沌的控制方法——预测反馈控制. 对所提出的方法进行了详细的论述和数值计算,并将结果与延时反馈控制结果进行了比较. 结果表明了该方法的有效性.

关键词:混沌,离散系统,预测控制,延时控制

PACC:0545

1 引 言

自从 Ott,Grebogi 和 Yorke[1] 提出 OGY 控制方法之后,在物理、化学、控制和通讯等许多领域,对混沌控制的研究一直是人们关注的焦点. OGY 方法的推广和应用已有很多报道[2—5].

Pyragas[6] 提出的一种混沌控制方法,其基本思想是 控制量是由 T 步延时状态与当前状态之差来确定,其中的 T 表示要稳定轨道的周期,因此,这种方法被称为延时反馈控制. 而 OGY 方法,则是通过数值计算,得到要稳定的周期轨道的近似表达式,然后,用该近似值与当前状态之差来确定控制量,因此,被控状态最终将收敛到近似轨道上而不是实际的 T 周期轨道上,显然,被控系统的性能直接取决于这种周期轨道的近似程度.

Ushio[7] 指出,对于离散系统,若在不动点附近的线性化系统,其大于 1 的特征值个数若是奇数,则该不动点不能通过延时反馈控制使其稳定. Nakajima[8] 则指出,连续系统也存在类似性质. 这种性质被称为"奇数性". 后来,有人利用与系统过去状态有关的许多信息来构成扩展的延时反馈控制,并认为它是一种很有效的方法. 然而,Nakajima 和 Ueda[9] 指出,在这种控制系统中,"奇数性"仍成立.

延时反馈控制和它的扩展都是基于增益反馈结构进行的. 在系统结构和参数已知的情况下,Xu 和 Bishop[10] 提出了一种对周期轨道能同时进行检测和控制的方法,该方法用牛顿法对周期点进行检测或近似,用先前的控制量、延时状态和当前状态来确定当前的控制量. 因此,用这种方法构成的是一个动态控制器,对稳定性问题的要求可以放宽. Konishi 和 Kohame[11] 提出了一种基于观测器的延时反馈控制,其观测器的维数是混沌系统维数的两倍. 最近,有人提出了一种维数与混沌系统维数相同的动态控制器,该动态控制器的优点是,其相应的稳定条件很容易获得.

当然,Pyragas 最初提出的静态控制器,具有结构简单,且易于实现的特点. Nakajima 和 Ueda 提出的方法,利用了周期轨道的对称性,Ushio 和 Yamamoto[12] 又对其进行了拓展. 这些方法都需要对要稳定的周期轨道进行估计,进而利用估计的周期轨道与当前状态之差构成反馈控制量.

本文针对离散映射系统混沌,提出了一种新的预测反馈控制方法,这是一种静态控制方法,它利用原自治系统,对状态进行预测,将该预测状态作为估计的周期轨道,并给出了一个非常简单的使不动点局部稳定的充要条件.

2 方法描述

设 n 维离散混沌系统如下:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \tag{1}$$

$u(t) \in R$ 是控制输入,$x(t) \in R^n$ 是系统的状态变量. 假设 f 是可微的,为使系统稳定到 T 周期轨道,Pyragas 提出下列延时反馈控制:

$$u(t) = H(x(t-T) - x(t)), \tag{2}$$

其中 H 是反馈增益矩阵.

在 OGY 方法中,$u(t)$由要稳定的周期轨道与当前状态之差 e 来确定的. 而 Pyragas 的基本思想是,若当前状态很接近要稳定的 T 周期轨道,则用 T 步延时状态与当前状态之差来近似偏差 e. 也就是说,把 T 步延时状态看作 T 周期点的估计值. 目前,类似的估计方法有很多,Pyragas 用的估计方法比较简单,Nakajime 和 Ueda[11] 提出的方法利用了周期轨道的对称性,而所有这些方法,都只利用了过去的状态. 受这些方法启发,我们利用当前状态 $x(t)$来对被控混沌系统的未来状态 $x_p(t)$进行预测,用该预测状态代替延时状态,来构成误差信号进行控制. 仿真实验结果表明,该方法是一种更加有效的方法.

设 $x_p(t)$表示在 t 时刻对 $x(t+T)$的预测值,则控制输入 $u(t)$由下式确定:

$$u(t) = H(x_p(t) - x(t)), \tag{3}$$

其中 H 是反馈增益阵. 我们称之为预测反馈控制.

设$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_T\}$是(1)式当 $u(t)\equiv 0$ 时的 T 周期轨道,则

$$\bar{x}_l = f^T(\bar{x}_l,0). \tag{4}$$

把$f^T(x(t),0)$作为 T 周期轨道的一个预测值 $x_p(t)$,则(3)式变为

$$u(t) = H(f^T(x(t),0) - x(t)). \tag{5}$$

这样,被控混沌系统就由下式描述:

$$x(t+1) = f(x(t),H(f^T(x(t),0) - x(t))). \tag{6}$$

显然,被控系统与原自治系统具有相同的维数. 而具有延时的离散反馈控制系统的维数大于相应的自治系统的维数. 因此,预测反馈控制与延时反馈控制相比,前者的理论分析更容易,更简单一些.

3 稳定性分析

为简单起见,考虑不动点的稳定性问题. 即设 $T=1$(1 周期轨道),$\bar{x}$是(1)式当 $u(t)\equiv 0$ 时的不动点,则(6)式变成

$$x(t+1) = f(x(t),H(f(x(t),0) - x(t))). \tag{7}$$

该被控系统在 $\bar{x}$附近的线性化方程为

$$\begin{aligned}\Delta x(t+1) &= A\cdot\Delta x(t) + BH(A-I)\Delta x(t)\\ &= (A + BH(A-I))\Delta x(t),\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $A_{n\times n}$是$f(\bar{x},0)$对 x 的微分,$B_{n\times l}$是$f(\bar{x},0)$对 u 的微分,$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}$.

定理 若线性化系统的矩阵对(A,B)可镇定,则存在反馈增益矩阵 H,使(8)式按指数稳定的充要条件为 $\det(A-I)\neq 0$.

[证] 充分性 若矩阵对(A,B)可镇定,则根据线性系统的极点配置定理,必存在状态反馈增益阵 $\tilde{H}$ 使$(A+B\tilde{H})$按指数稳定. 当 $\det(A-I)\neq 0$ 时,取 $H=\tilde{H}(A-I)^{-1}$,即可使(8)式渐近稳定.

必要性 假设 $\det(A-I)=0$,则存在 $\hat{x}\in R^n$,使 $A\hat{x}=\hat{x}$,且 $\hat{x}\neq 0$,同时,对$\forall\alpha\in R$,都有 $\alpha\hat{x}$满足$A(\alpha\hat{x})=\alpha\hat{x}$,即任一 $\alpha\hat{x}$都是(8)式的不动点,这样就不可能存在反馈增益阵 H 使(8)式稳定到某一点.

从定理可知,如果线性化系统的矩阵对(A,B)可镇定,且 $\det(A-I)\neq 0$,则通过引入预测反馈,可以使线性化系统渐近稳定到某一指定的不动点. 根据非线性系统稳定性与它的线性化系统稳定性之间的关系 如果非线性动力学的线性化系统是渐近稳定的,则原非线性系统是局部渐近稳定的. 可知,只要定理条件满足,原混沌系统在指定的不动点附近是渐近稳定的. 一般情况下,嵌入在混沌吸引子中的任一周期轨道,是双曲线形式,自然满足 $\det(A-I)\neq 0$,因此,预测反馈控制比延时反馈控制更具有实用价值.

如果 $\det(A-I)\neq 0$ 且矩阵对(A,B)可控,即 $\mathrm{rank}(B\ AB\cdots A^{n-1}B)=n$,此时$(A,B)$一定可镇定,则上述定理提供了一种反馈增益阵 H 的确定方法. 事实上,这里的 H 正是基于极点配置思想的状态反馈增益阵,其确定步骤如下:

1. 判断(8)式的可控性;
2. 设定系统(8)式的期望极点 $\lambda_i(i=1,2,\cdots n)$;
3. 利用极点配置思想,设计矩阵 $\tilde{H}$,即由 $\det(sI-(A+B\tilde{H}))=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$来设计 $\tilde{H}$;
4. 反馈增益阵 H 的确定:$H=\tilde{H}(A-I)^{-1}$.

4 数值计算与结果比较

现以 Logistic 映射为例,对预测反馈控制方法进行数值计算,并将该结果与延时反馈控制结果进行比较.

设 Logistic 映射为:

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t)) + u(t), \tag{9}$$

其中 r 是满足:$3.57<r\leqslant 4$ 的常量,在此参数取值范围,Logistic 映射呈现出混沌状态. 令 $x(t+1)=$

$x(t)$得两个不动点：$x_{q1}=0$ 和 $x_{q2}=(r-1)/r$. 为了使该混沌系统能稳定到不动点 $x_{qi}(i=1,2)$，引入(5)式所示的反馈控制，则被控制的 Logistic 映射(9)式变为：

$$\begin{aligned} x(t+1) &= rx(t)(1-x(t)) + H(x(t+1)-x(t)) \\ &= rx(t)(1-x(t)) + H(rx(t)(1-x(t)) \\ &\quad - x(t)). \end{aligned} \tag{10}$$

将(10)式在不动点 $x_{qi}(i=1,2)$ 附近进行线性化处理，得到

$$\begin{aligned} \Delta x(t+1) &= (-2r(1+H)x_{qi} + r \\ &\quad + H(r-1))\Delta x(t), \end{aligned}$$

其中 $\Delta x(t+1)=x(t+1)-x_{qi}\quad(i=1,2)$.

显然，对任意常数 $3.57<r\leqslant 4$，当 H 满足：

$$\left|-2r(1+H)x_{qi} + r + H(r-1)\right| < 1 \tag{11}$$

时，线性化系统能渐近稳定到指定的不动点. 根据非线性系统的稳定性与其线性化系统的稳定性之间的关系可知，被控混沌系统能局部渐近稳定到指定的不动点. 既然是局部稳定，就是说，只有当系统的状态落入不动点的一个小的邻域时，再施加控制才会有效，即

$$\begin{cases} u(t) = H(x(t+1) - x_q) \\ \quad \text{当}\ |x(t+1) - x_q| < \varepsilon; \\ u(t) = 0 \quad \text{其他}, \end{cases} \tag{12}$$

其中 ε 是一很小的正数.

在(12)式作用下，对系统(9)式进行数值计算. 参数设置为 $r=4, x(0)=0.1, \varepsilon=0.02, H=-2/3$；不动点 $x_{q2}=3/4$. 当 $t=100$s 时将控制量施加到混沌系统中，其结果示于图 1.

图 1(a)是状态变量随时间的变化轨迹，图 1(b)是控制量的变化轨迹. 从图 1 可以看出，通过引入预测反馈控制，能使被控混沌系统很快稳定到指定的不动点 $x_{q2}=3/4$，其稳定时间在 $t=111$s.

而延时反馈控制，其控制量为 $u(t)=H(x(t-1)-x(t))$，同样，在上述参数取值条件下，我们也对其进行了数值计算，结果见图 2 所示. 同样，图 2(a)是状态变量随时间的变化轨迹，图 2(b)是控制量的变化轨迹. 显然，延时反馈控制也能使混沌系统稳定到预先指定的不动点为 $x_{q2}=3/4$，但其稳定时间在 $t=223$s.

比较图 1 与图 2，可以看出，预测反馈控制比延时反馈控制的速度明显要快得多. 其原因不难从控制量的构成上找到. 从上面的论述可以看到，$t+1$ 时刻的控制量，对延时反馈来讲，是由过去的状态

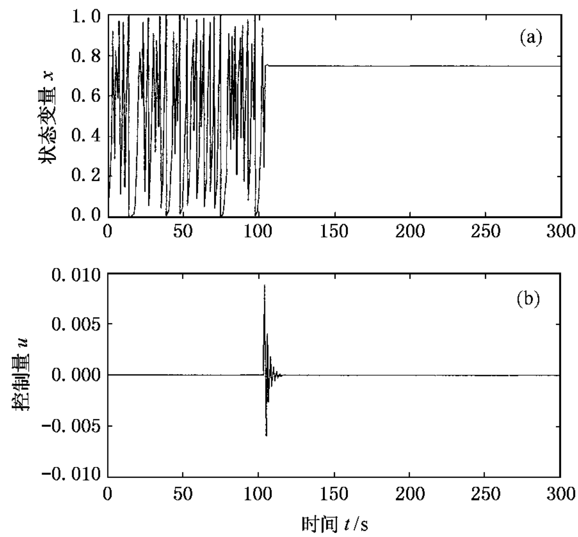

图 1　(a)，(b)为预测反馈控制数值计算结果

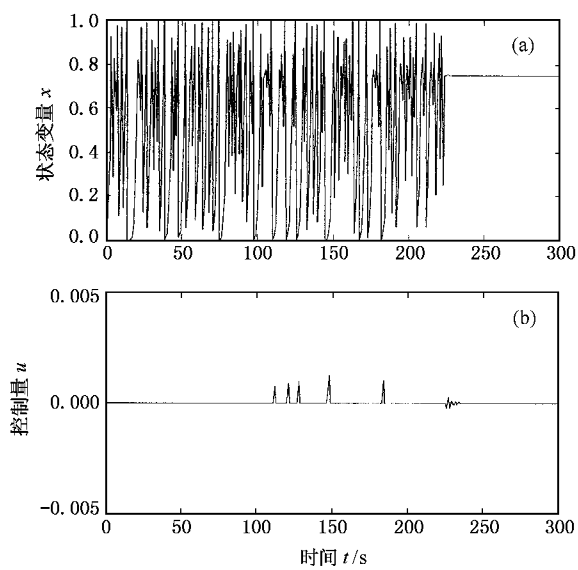

图 2　(a)和(b)为延时反馈控制数值计算结果

$x(t-1)$与当前状态 $x(t)$构成，而对预测反馈来讲，是由 $t+1$ 时刻的状态与不动点坐标 x_q 构成. 显然，预测控制能对系统状态进行及时的控制，一旦系统状态进入可控区域，即有控制信号产生，系统经过短时间($t=11$s)即可达到稳定. 而延时控制则不能及时纠正当前状态与不动点之间的偏差，而需要经过长时间($t=123$s)的控制，才能使系统稳定.

5　结　　论

基于延时反馈控制思想，本文针对离散映象系

统混沌,提出了一种预测反馈控制方法. 通过对简单的 Logistic 混沌映射的数值计算,并将预测反馈控制结果与延时反馈控制结果进行了比较. 结果表明,预测反馈控制是一种比延时反馈控制更加快速有效的控制方法. 当然,本文的方法是在系统数学模型精确已知的情况下提出的,在混沌系统数学模型未知或不完全确定情况下的控制,是目前正在研究的课题.

[1] E.Ott,C. Grebogi, J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.

[2] F.J. Romeiras, C.Grebogi, E. Ott, W.P. Dayawansa, *Physics*, **D58**(1992), 165.

[3] G. Chen, X.. Dong, From Chaos to Order, Methodologies, Perspectives and Applications (World Scientific, Singapore, 1998).

[4] J.Sh. Zhang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 403 (in Chinese) [张家树等, 物理学报, **49**(2000), 403].

[5] P.Zhou, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1804 (in Chinese) [周 平等, 物理学报, **48**(1999), 1804].

[6] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 421.

[7] T. Ushio, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **I43** (1996), 815.

[8] H. Nakajima, *Phys. Lett.*, **A232**(1997), 207.

[9] H. Nakajima, Y. Ueda, *Physica*, **D111** (1998), 143.

[10] D. Xu, S.R. Bishop, *Phys. Lett.*, **A210** (1996), 273.

[11] K. Konishi, H. Kokame, *Phys. Lett.*, **A248** (1998), 359.

[12] T. Ushio, S. Yamamoto, *Phys. Lett.*, **A247**(1998), 112.

[13] H. Nakajima, Y. Ueda, *Phys. Rev.*, **E58** (1998), 1757.

A NOVEL CONTROL METHOD FOR DISCRETE MAP CHAOTIC SYSTEM

WANG GAI-YUN[1)2)] YU JUE-BANG[1)] GU TIAN-XIANG[1)]

[1)] (*Department of Automatics University of Electronic Science and Technology of China*, *Chengdu* 610054, *China*)

[2)] (*Department of Computer*, *Guilin Institute of Electronic Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

(Received 9 May 2001; revised manuscript received 30 June 2001)

ABSTRACT

Based on the delayed feedback control idea, a novel prediction feedback control method for discrete chaotic system is presented. The method is illustrated in detail and the computer simulation is carried out. The simulation result is compared with that of delayed feedback control and it is shown that the proposed method is more effective for controlling fixed point of chaotic system.

Keywords: chaos, discrete system, prediction control, delayed control

PACC: 0545