

一类新的边界激变现象:混沌的边界激变^{*}

洪 灵 徐健学

(西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049)

(2000 年 7 月 1 日收到 2000 年 7 月 22 日收到修改稿)

混沌吸引子的激变是一类普遍现象. 借助于广义胞映射图论(generalized cell mapping digraph)方法发现了嵌入在分形吸引域边界内的混沌鞍. 这个混沌鞍由于碰撞混沌吸引子导致混沌吸引子完全突然消失, 是一类新的边界激变现象. 称为混沌的边界激变. 可以证明混沌的边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的. 在这种情况下, 当系统参数通过激变临界值时, 混沌吸引子连同它的吸引域突然消失, 同时这个混沌鞍也突然增大.

关键词: 广义胞映射, 有向图, 激变, 混沌鞍

PACC: 0545

1 引 言

随着系统参数的变化, 混沌吸引子的突然变化在非线性能动力系统中普遍存在. 几乎所有混沌吸引子的突然变化都是由于激变(crisis)^[1]. 激变按它所引起的混沌吸引子不连续变化的性质可分为边界激变(boundary crisis)和内部激变(interior crisis)^[2]. 边界激变是由于混沌吸引子与在其吸引域边界上的不稳定周期轨道相碰撞产生的^[1-4], 在这种情况下, 当系统参数通过激变临界值时, 混沌吸引子连同它的吸引域突然消失, 在相空间原混沌吸引子的位置上留下了一个混沌鞍. 内部激变是由于混沌吸引子与在其吸引域内部的不稳定周期轨道相碰撞^[1, 2]或与在其吸引域内部的混沌鞍相碰撞^[5-7], 导致当系统参数通过激变临界值时混沌吸引子大小(尺寸和形状)发生突然变化. 混沌鞍是相空间不稳定(非吸引)的混沌不变集合.

广义胞映射图论(GCMD)方法^[3, 8]是基于广义胞映射系统与图的严格理论对应, 借助于图的算法有效实现非线性系统全局分析包括全局瞬态分析的新方法. 与其他胞映射方法相比较, GCMD 方法有三大优点: 1) 能确定状态空间不稳定(非吸引)的不不变集包括不稳定(非吸引)的混沌集合; 2) 应用图的压缩方法, 将所有的自循环胞集压缩后, 广义胞映射

系统成为一拟序集, 能借助于图的算法有效实现全局瞬态的拓扑排序; 3) 在全局定性性质的分析计算中, 仅采用布尔运算(变量 0 与 1 的逻辑运算). 因此 GCMD 方法提供了一个分析非线性系统复杂行为的新途径.

Stewart^[9, 10]在常微分方程系统中首次发现了一类新的混沌吸引子突然消失的现象, 证明了这种混沌吸引子的突然消失是由于混沌吸引子碰撞分形吸引域边界. 后来, Thompson 等^[11]在对耗散常微分系统的分岔进行分类时, 将 Stewart 发现的混沌吸引子的突然消失归为新的一类混沌吸引子的不连续分岔, 并称为混沌的边界激变(chaotic boundary crisis)或混沌鞍突变(chaotic saddle catastrophe). 将 Stewart 的混沌的边界激变(见文献[9, 11]或文献[10]第 284 页图 13.12)与 Grebogi 等^[1]的边界激变定义(碰撞鞍本身)相比较, 一个迷惑的问题是 Stewart 的混沌的边界激变是由于混沌吸引子碰撞不稳定不变集的稳定流形(即分形吸引域边界)还是碰撞不稳定不变集本身(即混沌鞍). 但是, 由于 Grebogi 等^[1]的边界激变定义是基于二维平方映射系统, 对于一维系统, 鞍和鞍的稳定流形(吸引域边界)重合, 因此, 相同的问题再一次被提出(见文献[10]第 278 至 284 页), 即边界激变是由于混沌吸引子碰撞不稳定不变集的稳定流形(即吸引域边界)还是碰撞不稳定不变集本身(即鞍).

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 19972051 和 19990510)资助的课题.

本文借助于广义胞映射图论 (generalized cell mapping digraph) 方法,研究了已由 Stewart 发现的混沌的边界激变,证实了 Stewart 的混沌的边界激变的存在,并进一步发现了嵌入在分形吸引域边界内的混沌鞍,我们证明 Stewart 的混沌的边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的,在这种情况下,当系统参数通过激变临界值时,混沌吸引子连同它的吸引域突然消失,同时这个混沌鞍也突然增大.在另一常微分方程系统中,我们再次证明了这种碰撞混沌鞍的混沌的边界激变.

2 单驻处瞬胞集和多驻处瞬胞集

由瞬胞驻处 (domicile) 的定义^[3,12]可知,如果一个瞬胞 j 可达 (leads to) 某一永久自循环胞集 $P(i)$, 那么我们称 $P(i)$ 为瞬胞 j 的一个驻处,一个瞬胞可以有多个驻处.按照瞬胞所具有驻处的数目,瞬胞能被分类为单驻处瞬胞和多驻处瞬胞,仅具有一个驻处的瞬胞称为单驻处瞬胞,具有多于一个驻处的瞬胞称为多驻处瞬胞,单驻处瞬胞形成吸引域,而多驻处瞬胞形成吸引域边界.

瞬胞的驻处很自然地提供了一个将瞬胞分类为瞬胞集的方法.如果有 N_p 个永久自循环胞集 (吸引子) $P(i)$, $i=1, 2, \dots, N_p$, 具有第 i 个永久自循环胞集作为驻处的所有单驻处瞬胞所组成的集合称为第 i 个单驻处瞬胞集,并记为 $B(i)$, $i=1, 2, \dots, N_p$, 第 i 个单驻处瞬胞集 $B(i)$ 形成了第 i 个永久自循环胞集的吸引域.

仅具有第 i 个和第 j 个永久自循环胞集作为驻处的所有多驻处瞬胞所组成的集合被称为第 (i, j) 二驻处瞬胞集,并记为 $B(i, j)$, $i, j=1, 2, \dots, N_p$ 和 $i \neq j$, 第 (i, j) 二驻处瞬胞集 $B(i, j)$ 形成了第 i 个吸引域 $B(i)$ 和第 j 个吸引域 $B(j)$ 的边界,总共有 $C_{N_p}^2$ 个二驻处瞬胞集,这里 $C_{N_p}^2$ 是二项式系数 $N_p(N_p-1)/2$.

仅具有第 i , 第 j 和第 k 个永久自循环胞集作为驻处的所有多驻处瞬胞所组成的集合被称为第 (i, j, k) 三驻处瞬胞集,并记为 $B(i, j, k)$, $i, j, k=1, 2, \dots, N_p$ 和 $i \neq j \neq k$, 第 (i, j, k) 三驻处瞬胞集 $B(i, j, k)$ 形成了第 i 个吸引域 $B(i)$, 第 j 个吸引域 $B(j)$ 和第 k 个吸引域 $B(k)$ 的边界,总共有 $C_{N_p}^3$ 个三驻处瞬胞集,这里 $C_{N_p}^3$ 是二项式系数 $N_p(N_p-1)(N_p-2)/6$.

按照这个瞬胞的分类方法,四驻处瞬胞集、五驻处瞬胞集以及更多驻处瞬胞集同样地能被定义,最后一个 N_p 驻处瞬胞集,这个集合中的每一个胞都具有大于零的概率到达所有的永久自循环胞集 $P(i)$, $i=1, 2, \dots, N_p$, 总共有 $2^{N_p}-1$ 个瞬胞集.

3 正弦强迫、对称双势井 duffing 系统中混沌的边界激变

正弦强迫、对称双势井 duffing 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.25 \frac{dx}{dt} - x + x^3 = A \sin t. \quad (1)$$

在耗散常微分系统的非线性动力学中,方程 (1) 已经成为混沌和分形域边界研究的典型模型.对于方程 (1) 已经有大量的理论和实验研究结果^[9,13], 由于在相当小的强迫振幅下方程 (1) 出现混沌运动, 因此方程 (1) 常常由 Melnikov 方法研究.

对于方程 (1), 当控制参数 A 在间隔 $(0.192, 0.193)$ 时, Stewart^[9] 首次发现了一类新的混沌吸引子突然消失的现象,即混沌的边界激变. Stewart 的结论^[9,11] 是混沌的边界激变是由于混沌吸引子碰撞分形域边界,可是,与先前的同宿相交产生这个分形域边界的规则 (regular) 鞍保持一段距离,见文献 [10] 第 284 页图 13.12 也解释了 Stewart 的混沌的边界激变.应用 GCMD 方法,我们证实 Stewart 的混沌的边界激变的存在,并且,我们发现了嵌入在分形吸引域边界内的混沌鞍,这个混沌鞍是相空间不稳定 (非吸引) 的不变集,我们进一步证明混沌的边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的,在这种情况下,当系统参数通过激变临界值时,混沌吸引子连同它的吸引域突然消失,同时这个混沌鞍也突然增大.我们的结论不仅回答了 Stewart 的混沌的边界激变存在的是碰撞混沌鞍还是碰撞分形域边界 (混沌鞍的稳定流形) 这个迷惑的问题,而且支持了 Grebogi 等边界激变 (碰撞鞍本身) 的定义.

应用四阶 Runge-Kutta 算法得到控制参数 A 在 $(0.18, 0.2)$ 范围内变化的分岔图,如图 1 所示 (积分步长取 1.0×10^{-4} , 舍去前 5×10^6 步瞬态). 在图 1 中,图 1(a) 的初始条件不同于图 1(b) 的初始条件,因此,当控制参数 A 在 $0.18 \leq A \leq 0.192$ 范围内变化时,系统有两个共存的吸引子,即周期一 ($p-1$) 吸引子和混沌吸引子,当 $A \approx 0.192$ 时,出现了一个从混沌吸引子到 $p-1$ 吸引子的不连续跳跃,

特别地,当 $A \approx 0.192$ 时混沌吸引子与 $p-1$ 吸引子之间存在一段可测量的距离,这段距离表明混沌鞍的存在.

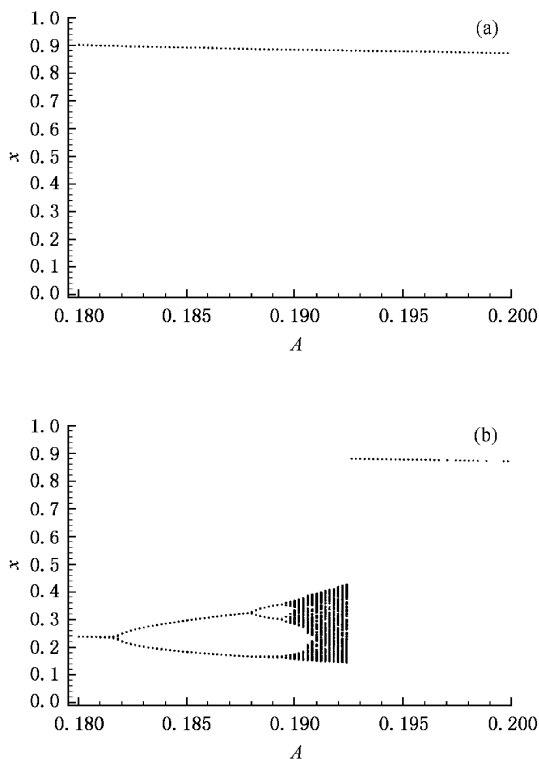


图1 方程(1)的分岔图 (a)为初始条件 $x(0)=0.8$, $dx(0)/dt=0.1$ (b)为初始条件 $x(0)=0.3$, $dx(0)/dt=-0.2$

应用 GCMD 方法研究 Stewart 的混沌的边界激变.选取 105×105 的胞结构均匀地覆盖感兴趣的一有限区域 $(-0.1 \leq x \leq 1.0) \times (-0.5 \leq dx/dt \leq 0.4)$ 这样,胞的尺寸是 0.0105×0.0086 并且在每个胞内取 25×25 个采样点,在感兴趣的区域以外,引入陷胞(sink cell),状态胞的总数目(包括陷胞)为 $105 \times 105 + 1$.

A 在间隔 $(0.192, 0.193)$ 时的混沌的边界激变如图 $\chi(a)$ 和图 $\chi(b)$ 所示.

在 $A=0.192$ 时,我们发现两个永久自循环胞集和三个瞬态自循环胞集.巨大的非周期永久自循环胞集对应混沌吸引子(标记符号“●”),仅有四个胞组成的非周期永久自循环胞集对应周期一($p-1$)吸引子(标记符号“■”).巨大的非周期瞬态自循环胞集对应混沌鞍(标记符号“○”),周期三瞬态自循环胞集对应周期三鞍(标记符号“▲”),仅有两个胞组成的非周期瞬态自循环胞集对应周期一鞍(标记符号“▼”),以上对应能通过自循环胞集的局部细化方法^[6,7]进一步

加以确定.在这种情况下,总共有三个永久自循环胞集(包括陷胞),混沌吸引子、 $p-1$ 吸引子、陷胞分别顺序地被标记 1, 2, 3.混沌吸引子的吸引域 $B(1)$ 标记符号“×”, $p-1$ 吸引子的吸引域 $B(2)$ 标记符号“+”,陷胞的吸引域 $B(3)$ 标记符号“.”,混沌吸引子和 $p-1$ 吸引子的吸引域边界 $B(1, 2)$ 标记空白,混沌吸引子和陷胞的吸引域边界 $B(1, 3)$ 是一个空集, $p-1$ 吸引子和陷胞的吸引域边界 $B(2, 3)$ 标记“ \sim ”,混沌吸引子、 $p-1$ 吸引子和陷胞的吸引域边界 $B(1, 2, 3)$ 标记符号“ k ”.如图 $\chi(a)$ 所示,吸引域边界 $B(1, 2)$ 的厚度远大于所有坐标方向胞尺寸的最大值,边界 $B(1, 2)$ 是分形边界,也可通过对域边界的细化方法^[12]进一步加以确定.特别地,混沌鞍嵌入在分形边界 $B(1, 2)$ 内,周期三鞍是在边界 $B(1, 2, 3)$ 内,周期一鞍是在 $p-1$ 吸引子吸引域 $B(2)$ 的边缘.图 $\chi(a)$ 显示混沌吸引子的指端正在接触分形吸引域边界上的混沌鞍.

在 $A=0.193$ 时,我们发现仅一个永久自循环胞集和三个瞬态自循环胞集,非周期永久自循环胞集对应 $p-1$ 吸引子(标记符号“■”),巨大的非周期瞬态自循环胞集对应混沌鞍(标记符号“○”),周期三瞬态自循环胞集对应周期三鞍(标记符号“▲”),仅有一个胞组成的非周期瞬态自循环胞集对应周期一鞍(标记符号“▼”),以上对应能通过自循环胞集的局部细化方法^[6,7]进一步加以确定.在这种情况下,总共有两个永久自循环胞集(包括陷胞), $p-1$ 吸引子和陷胞分别被标记 1, 2. $p-1$ 吸引子的吸引域 $B(1)$ 标记符号“+”,陷胞的吸引域 $B(2)$ 标记符号“.”, $p-1$ 吸引子和陷胞的吸引域边界 $B(1, 2)$ 标记空白.如图 $\chi(b)$ 所示,吸引域边界 $B(1, 2)$ 的厚度远大于所有坐标方向胞尺寸的最大值,边界 $B(1, 2)$ 是分形边界,也可通过对域边界的细化方法^[12]进一步加以确定.

图 $\chi(a)$ 和图 $\chi(b)$ 表明混沌的边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的,在这种情况下,当系统参数通过激变临界值时,混沌吸引子连同它的吸引域突然消失,同时这个混沌鞍也突然增大,混沌鞍新增的一部分来自于原混沌吸引子.

4 余弦强迫 duffing 系统中混沌的边界激变

在这一节我们研究另一个 duffing 系统,其目的

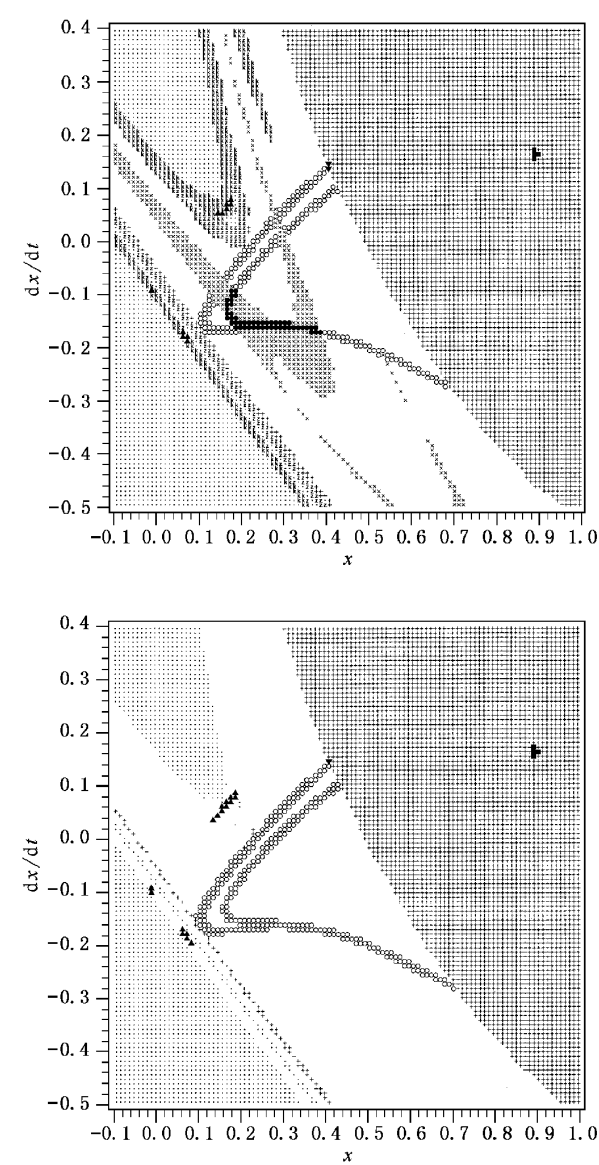


图2 方程(1)在 A 间隔 $(0.192, 0.193)$ 时混沌的边界激变
混沌吸引子标记符号“●”,它的吸引域标记符号“×”, p -1 吸引子标记符号“■”,它的吸引域标记符号“+”,混沌鞍标记符号“○”,周期一鞍标记符号“▼”,周期三鞍标记符号“▲”,吸引域边界 $B(1,2)$ 用空白表示,边界 $B(2,3)$ 标记符号“ \sim ”,边界 $B(1,2,3)$ 标记符号“ k ”,陷胞的吸引域用符号“ \cdot ”表示

是对上一节描述的混沌的边界激变现象的普适性给予证明.

余弦强迫 duffing 系统

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.25 \frac{dx}{dt} + ax + x^3 = 8.5\cos t. \quad (2)$$

我们考虑控制参数 α 在 $(0.15, 0.3)$ 范围内变化,应用四阶 Runge-Kutta 算法,得到分岔图,如图3所示(积分步长取 1.0×10^{-4} ,舍去前 5×10^6 步瞬态).在图3(a)中,在 $\alpha \approx \alpha^* = 0.181$,出现了混沌吸

引子大小突然变化的不连续现象,这个不连续现象进一步被图3(b)分解,在图3(b)中初始条件不同于图3(a)的初始条件,因此对于 $\alpha^* < \alpha < 0.22$,系统有两个共存的混沌吸引子,即一个在上方的一个小混沌吸引子和一个在下方的一个小混沌吸引子,运动最终被吸引到这两个小混沌吸引子的哪一个,取决于初始条件.特别地,在图3中,当 $\alpha \approx \alpha^*$ 时这两个小混沌吸引子之间存在一段可测量的距离,这段距离表明混沌鞍的存在.将图3与文献[6]的图1或图2比较,文献[6]的图1或图2就不存在这样一段可测量的距离.

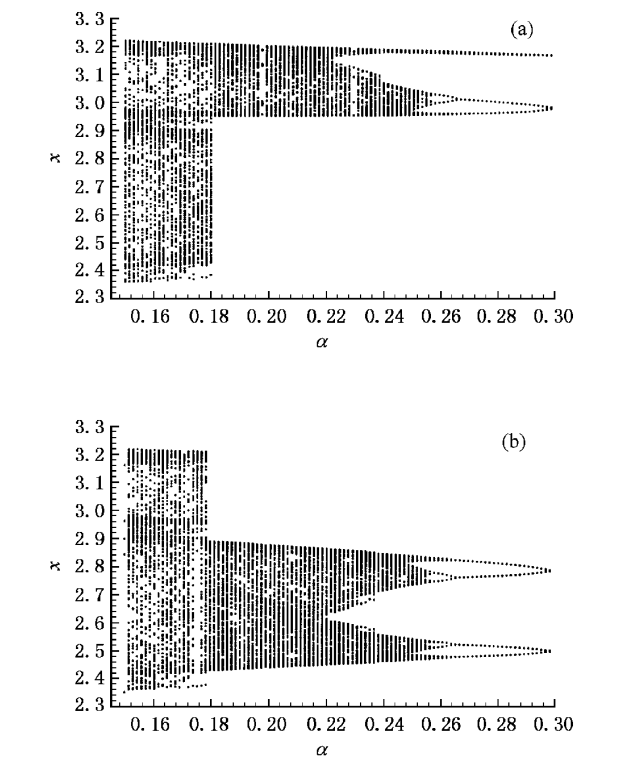


图3 方程(2)的分岔图 (a)为初始条件 $x(0)=3.0, dx(0)/dt=2.5$ (b)为初始条件 $x(0)=2.6, dx(0)/dt=-1.0$

借助于 GCMD 方法,我们发现了在 $\alpha \approx \alpha^{**} = 0.207$ 时的混沌的边界激变,即上右方小混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍碰撞,碰撞后这个上右方小混沌吸引子连同它的吸引域突然完全消失,同时混沌鞍也突然增大,当从 α^{**} 到 α^* 减小 α 时,这个混沌鞍最终碰撞下左方小混沌吸引子导致在 $\alpha \approx \alpha^*$ 时的内部激变.

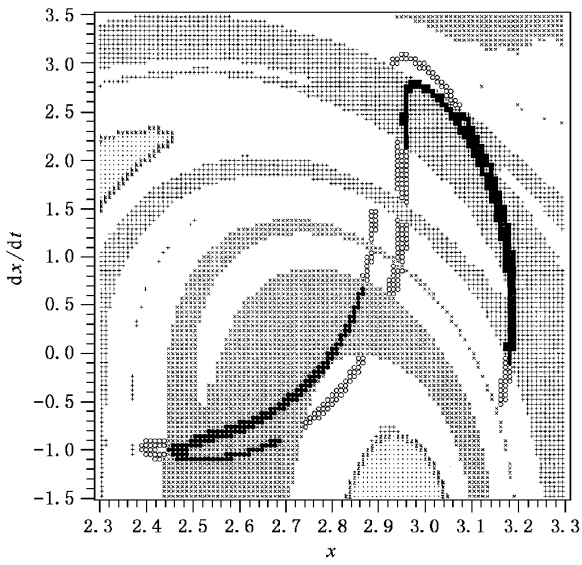
选取 105×105 的胞结构均匀地覆盖感兴趣的一有限区域 $(2.3 \leq x \leq 3.3) \times (-1.5 \leq dx/dt \leq 3.5)$,这样,胞的尺寸是 0.0095×0.0476 ,并且在每

个胞内取 25×25 个采样点,在感兴趣的区域以外,引入陷胞(sink cell),状态胞的总数目(包括陷胞)为 $105 \times 105 + 1$.

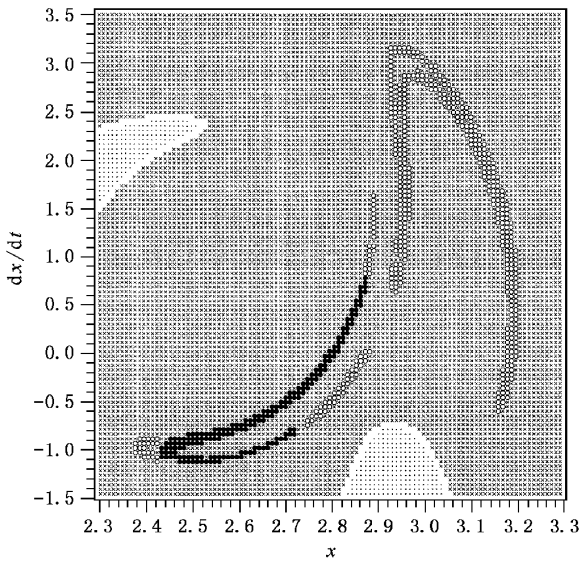
α 在间隔 $(0.207, 0.206)$ 时的混沌的边界激变如图 4(a) 和图 4(b) 所示.

在 $\alpha = 0.207$ 时,存在两个巨大的非周期永久自循环胞集,代表两个共存的混沌吸引子,即一个下左方小混沌吸引子(标记符号“●”)和一个上右方小

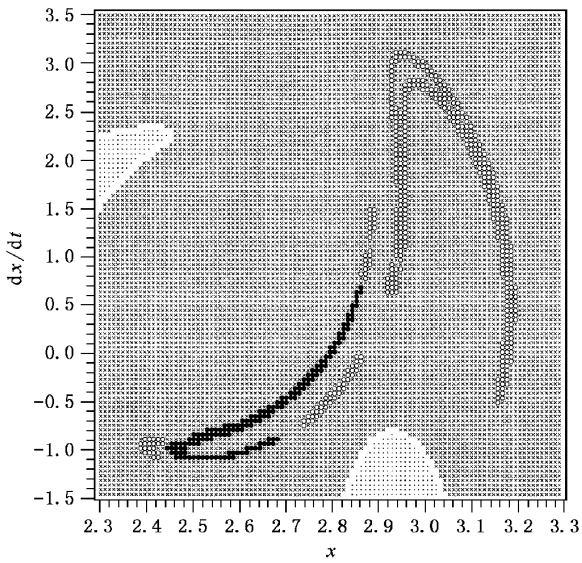
混沌吸引子(标记符号“■”).有一个巨大的非周期瞬态自循环胞集,对应混沌鞍(标记符号“○”).在这种情况下,总共有三个永久自循环胞集(包括陷胞),下左方小混沌吸引子、上右方小混沌吸引子、陷胞分别顺序地被标记 1, 2, 3. 下左方小混沌吸引子的吸引域 $B(1)$ 标记符号“×”,上右方小混沌吸引子的吸引域 $B(2)$ 标记符号“+”,陷胞的吸引域 $B(3)$ 标记符号“.”. 下左方小混沌吸引子和上右方小混沌吸



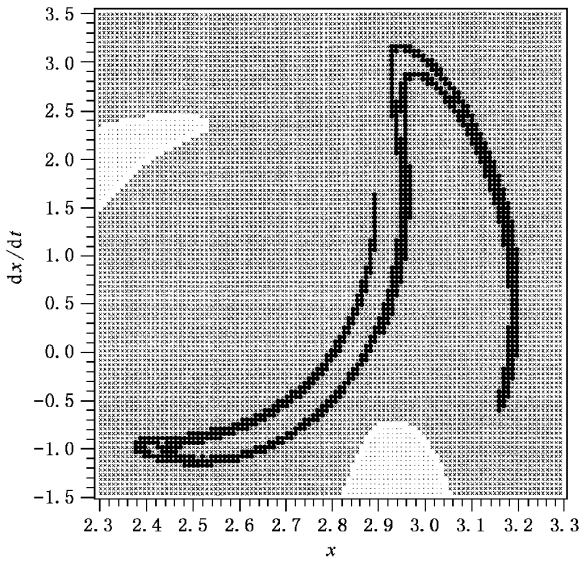
(a) $\alpha = 0.207$



(c) $\alpha = 0.181$



(b) $\alpha = 0.206$



(d) $\alpha = 0.180$

图 4 方程 (2) 在 α 间隔 $(0.207, 0.206)$ 时的混沌的边界激变和 α 间隔 $(0.181, 0.18)$ 时的内部激变. 下左方小混沌吸引子标记符号“●”, 它的吸引域标记符号“×”, 上右方小混沌吸引子标记符号“■”, 它的吸引域标记符号“+”. 混沌鞍标记符号“○”, 吸引域边界 $B(1, 2)$ 用空白表示. 边界 $B(1, 3)$ 标记符号“y”, 边界 $B(2, 3)$ 标记符号“z”, 边界 $B(1, 2, 3)$ 标记符号“k”, 陷胞的吸引域用符号“.”表示.

引子的吸引域边界 $B(1, 2)$ 标记空白, 如图 4(a) 所示, 吸引域边界 $B(1, 2)$ 的厚度远大于所有坐标方向胞尺寸的最大值, 边界 $B(1, 2)$ 是分形边界, 也可通过对域边界的细化方法^[12]进一步加以确定, 吸引域边界 $B(1, 3)$ 标记符号“ y ”, 吸引域边界 $B(2, 3)$ 标记“ z ”, 吸引域边界 $B(1, 2, 3)$ 标记符号“ k ”. 特别地, 混沌鞍嵌入在分形边界 $B(1, 2)$ 内. 图 4(a) 显示上右方小混沌吸引子的指端正在接触分形吸引域边界上的混沌鞍.

在 $\alpha = 0.206$ 时, 我们发现仅一个巨大的非周期永久自循环胞集和一个巨大的非周期瞬态自循环胞集, 永久自循环胞集对应下左方小混沌吸引子(标记符号“ \bullet ”), 瞬态自循环胞集对应混沌鞍(标记符号“ \circ ”). 在这种情况下, 总共有两个永久自循环胞集(包括陷胞), 下左方小混沌吸引子和陷胞分别被标记 1, 2. 下左方小混沌吸引子的吸引域 $B(1)$ 标记符号“ \times ”, 陷胞的吸引域 $B(2)$ 标记符号“ \cdot ”, 下左方小混沌吸引子和陷胞的吸引域边界 $B(1, 2)$ 标记空白.

图 4(a) 和图 4(b) 表明混沌的边界激变是由于

混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的, 在这种情况下, 当系统参数通过激变临界值时, 混沌吸引子连同它的吸引域突然消失, 同时这个混沌鞍也突然增大, 混沌鞍新增的一部分来自于原混沌吸引子.

α 在间隔 $(0.181, 0.18)$ 时的内部激变如图 4(c) 和图 4(d) 所示.

5 结 论

我们证明了混沌的边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的, 在这种情况下, 当系统参数通过激变临界值时, 混沌吸引子连同它的吸引域突然消失, 同时这个混沌鞍也突然增大.

我们的结论不仅回答了 Stewart 的混沌的边界激变存在的是碰撞混沌鞍还是碰撞分形域边界(混沌鞍的稳定流形)这个迷惑的问题, 而且支持了 Grebogi 等边界激变(碰撞鞍本身)的定义.

- [1] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Physica*, **D7**(1983), 181.
- [2] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1284.
- [3] L. Hong, J. X. Xu, *Phys. Lett.*, **A262**(1999), 361.
- [4] L. Hong, J. X. Xu, *Acta Mech. Sin.*, accepted (in Chinese) [洪灵、徐健学, 力学学报, 已录用].
- [5] Y. C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, In *Applied Chaos*, eds. J. H. Kim, J. Stringer (Wiley, New York, 1992), pp. 441—455.
- [6] L. Hong, J. X. Xu, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1227 (in Chinese) [洪灵、徐健学, 物理学报, **49**(2000), 1227].
- [7] L. Hong, J. X. Xu, *Int. J. Bif. Chaos*, **11**(2001), March.
- [8] J. X. Xu, L. Hong, *Acta Mechan. Sin.*, **31**(1999), 724

(in Chinese) [徐健学、洪 灵, 力学学报, **31**(1999), 724].

- [9] H. B. Stewart, In *Dynamical Systems Approaches to Nonlinear Problems in Systems and Circuits*, eds. F. Salam, M. Levi, (SIAM, Philadelphia, 1988), pp. 138—149.
- [10] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, Chichester, 1986), Chapter 13.
- [11] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, Y. Ueda, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1019.
- [12] C. S. Hsu, *Cell-to-Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems* (Springer-Verlag, New York, 1987), Chapter 11, 12.
- [13] H. B. Stewart, J. M. T. Thompson, Y. Ueda, A. N. Lansbury, *Physica*, **D85**(1995), 259.

A NEW TYPE OF BOUNDARY CRISES : CHAOTIC BOUNDARY CRISES^{*}

HONG LING XU JIAN-XUE

(*Institute of Nonlinear Dynamics , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China*)

(Received 1 July 2000 ; revised manuscript received 22 July 2000)

ABSTRACT

Crises of chaotic attractors are typical phenomena in nonlinear dynamical systems. By means of generalized cell mapping digraph(GCMD) method , we show that a chaotic boundary crisis results from a collision between a chaotic attractor and a chaotic saddle in the fractal basin boundary. In such a case the chaotic attractor , together with its basin of attraction , is suddenly destroyed as the parameter passes through a critical value , simultaneously the chaotic saddle also undergoes an abrupt enlargement in its size.

Keywords : generalized cell mapping , digraph , crisis , chaotic saddle

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 19972051 and 19990510).