

贝塞耳函数调制的高斯光束通过有 光阑 $ABCD$ 光学系统的传输^{*}

王喜庆

(西南交通大学应用物理系, 成都 610031)

吕百达[†]

(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都 610064)

(2000 年 8 月 30 日收到, 2000 年 11 月 11 日收到修改稿)

基于惠更斯-菲涅尔广义衍射积分, 对变量为径向平方的贝塞耳函数调制的高斯光束(QBG 光束)通过有圆孔光阑限制的一阶 $ABCD$ 光学系统的传输进行了研究. 采用将圆域函数可表示为复高斯函数叠加的方法, 推导出了普适的场分布解析公式, 以 QBG 光束通过有圆孔光阑限制的薄透镜系统为例进行了分析与讨论, 数值计算结果证明了本文所用方法的优点, 所得结果与直接用广义衍射积分公式进行复杂的数值计算结果完全一致.

关键词: QBG 光束, 光阑, $ABCD$ 光学系统, 传输特性

PACC: 4230, 4290

1 引 言

最近由 Caron 和 Potvliege 提出了一类新的贝塞耳-高斯光束即径项变量为 r^2 的贝塞耳函数调制的高斯光束(以下简称为 QBG 光束), 它是近轴近似下波动方程的解^[1]. 与传统研究方法不同的是, 本文将圆域函数表示为复高斯函数的叠加式, 对 QBG 光束通过有光阑限制的一阶 $ABCD$ 光学系统的传输进行了研究, 给出在有光阑限制情况下, QBG 光束解析形式的传输公式. 作为应用例, 对 QBG 光束通过带有圆孔光阑的薄透镜的情况进行了计算分析与讨论.

2 理论推导

2.1 QBG 光束通过一阶 $ABCD$ 系统的传输特性

QBG 光束在 z 平面上的场分布为^[1]

$$E(r, \varphi, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz} J_{|m|/2} \left(\frac{\mu r^2}{w(z)} \right)$$

$$\cdot \exp \left[-\frac{1 + (\mu^2 + 1)z/z_R}{w^2(z)} r^2 \right] e^{im\varphi}, \quad (1)$$

其中

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 - (\mu^2 + 1)(z/z_R)^2 + i2z/z_R}, \quad (2)$$

$J_{|m|/2}$ 表示 $|m|/2$ 的贝塞耳函数, k 代表波数, μ 是与 QBG 光束相关的参数, z_R 表示基模高斯光束的瑞利长度, w_0 表示在 $z=0$ 时 $w(z)$ 的值, 即基模高斯光束的束腰半径.

当 QBG 光束通过光阑孔径为 a 的一阶 $ABCD$ 光学系统时(见图 1)其场分布由 Collins 公式给出^[2]

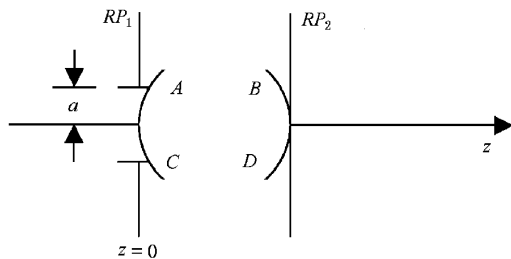


图 1 QBG 光束通过有圆孔光阑限制的 $ABCD$ 光学系统示意图

^{*} 国家高技术研究发展计划(批准号: 416-2.1.2)资助的课题.

[†] 西南交通大学客座教授.

$$E(r, \varphi, z) = -\frac{i}{\lambda B} \exp(ikL) \int_0^{2\pi} \int_0^a E_0(r_0, \varphi_0, z_0) \exp\left\{\frac{ik}{2B} [Ar_0^2 + Dr^2 - 2rr_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)]\right\} r_0 dr_0 d\varphi_0, \quad (3)$$

其中 λ 为光束波长; A, B, C, D 是一阶光学系统的矩阵元素, 且 $AD - BC = 1$, 假设光束的 $z=0$ 平面位于入射面, 则由 (1) 式得到

$$E(r_0, \varphi_0, z_0 | z_0=0) = A_0 J_{|m|/2} \left(\frac{\mu r_0^2}{w_0^2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{r_0^2}{w_0^2}\right) \exp(im\varphi_0), \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (3) 式并利用贝塞耳的积分表达式^[3]

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ix \cos\theta + in\theta) d\theta \quad (5)$$

得到

$$E(r', \varphi, z) = (-i)^{n+1} \frac{w_0^2}{\lambda B} \alpha^2 \cdot \exp\left(\frac{ikw_0^2}{2B} D \alpha^2 r'^2\right) \exp(ikL) \cdot \exp(im\varphi) \int_0^1 J_{|m|/2}(\mu \alpha^2 \zeta^2) J_m\left(\frac{k w_0^2 \alpha}{B} r' \zeta\right) \cdot \exp\left[-\left(1 - \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \alpha^2 \zeta^2\right] \zeta d\zeta, \quad (6)$$

其中 $r' = r/w_0$, $\zeta = r_0/a$ 为归一化坐标, $\alpha = a/w_0$

为截断系数, 为书写方便略去了常数 A_0 .

在有光阑限制的光束问题传输研究中通常需对 (6) 式作数值积分, 这类积分一般是很费机时的^[4,5]. 与常规处理方法不同, 本文引入如下函数:

$$H(\zeta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \zeta < 1; \\ 0 & 1 \leq \zeta < \infty, \end{cases} \quad (7)$$

则 (6) 式变为

$$E(r', \varphi, z) = (-i)^{n+1} \frac{w_0^2}{\lambda B} \alpha^2 \exp\left(\frac{ikw_0^2}{2B} D \alpha^2 r'^2\right) \cdot \exp(ikL) \exp(im\varphi) \int_0^\infty J_{|m|/2}(\mu \alpha^2 \zeta^2) \cdot J_m\left(\frac{k w_0^2 \alpha}{B} r' \zeta\right) \exp\left[-\left(1 - \frac{ikA w_0^2}{2B}\right) \alpha^2 \zeta^2\right] \cdot H(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (8)$$

若函数 $H(\zeta)$ 用高斯函数展开

$$H(\zeta) = \sum_{n=1}^N A_n \exp(-B_n \zeta^2), \quad (9)$$

其中 A_n, B_n 分别为展开系数和高斯系数, 可由计算机优化得到^[6].

将 (9) 式代入 (8) 式, 并利用积分^[7]

$$\int_0^\infty \exp(-pt) J_\nu(t) J_{2\nu}(2\sqrt{at}) dt = \frac{1/2}{(p^2 + 1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{ap}{p^2 + 1}\right) J_\nu\left(\frac{a}{p^2 + 1}\right) \quad (10)$$

得到

$$E(r', \varphi, z) = (-i)^{n+1} \frac{\pi w_0^2 \alpha^2}{\lambda B} \sum_{n=1}^N \frac{A_n \exp(ikL) \exp(im\varphi)}{\sqrt{\mu^2 \alpha^4 + (B_n + \alpha^2 - \frac{ikA}{2B} w_0^2 \alpha^2)^2}} \cdot J_{|m|/2} \left[\frac{\frac{k^2 w_0^4 \alpha^2}{4B^2} \mu r'^2}{\mu^2 \alpha^4 + (B_n + \alpha^2 - \frac{ikA}{2B} w_0^2 \alpha^2)^2} \right] \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\frac{k^2 w_0^4 \alpha^2}{4B^2} (B_n + \alpha^2 - \frac{ikA}{2B} w_0^2 \alpha^2)}{\mu^2 \alpha^4 + (B_n + \alpha^2 - \frac{ikA}{2B} w_0^2 \alpha^2)^2} - \frac{ikD}{2B} w_0^2 \right] r'^2\right\}. \quad (11)$$

(11) 式即为 QBG 光束通过有光阑限制的一阶 ABCD 光学系统的传输公式, 是本文所得的主要解析结果. 下面以光束通过有光阑限制的聚焦薄透镜的传输系统为例说明 (11) 式的应用.

2.2 光束通过有光阑限制的聚焦薄透镜的传输

当焦距为 f 的薄透镜及半径为 a 的圆孔光阑位

于 $z=0$ 平面 (RP_1) 时, 表征光学系统的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z & (1 + \Delta z)f \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\Delta z = \frac{z-f}{f}$, z 为出射面所在的位置.

将 (12) 式代入 (11) 式得到

$$\begin{aligned}
 E(r', \varphi, z) = & (-i)^{m+1} \frac{\pi N_F \alpha^2}{1 + \Delta z} \exp\left(i \frac{\pi N_F}{1 + \Delta z} r'^2\right) \exp(ikz) \exp(im\varphi) \\
 & \cdot \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\sqrt{\mu^2 \alpha^4 + \left(\alpha^2 + B_n + \frac{i\pi N_F \Delta z}{1 + \Delta z}\right)^2}} J_{|m|/2} \left[\frac{\frac{\pi^2 N_F^2 \alpha^4}{(1 + \Delta z)^2} \mu r'^2}{\mu^2 \alpha^4 + \left(\alpha^2 + B_n + \frac{i\pi N_F \Delta z}{1 + \Delta z}\right)^2} \right] \\
 & \cdot \exp \left[-\frac{\frac{\pi^2 N_F^2 \alpha^2}{(1 + \Delta z)^2} \left(\alpha^2 + B_n + \frac{i\pi N_F \Delta z}{1 + \Delta z}\right)}{\mu^2 \alpha^4 + \left(\alpha^2 + B_n + \frac{i\pi N_F \Delta z}{1 + \Delta z}\right)^2} r'^2 \right], \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中 $N_F = \frac{\omega_0^2}{\lambda f}$ 为光束的菲涅耳数。

以 (13) 式和与 (6) 式对应的积分公式为依据, 计算了 QBG 光束通过半径为 a 的圆孔光阑薄透镜系统的轴上光强分布, 如图 2 所示。

由图 2 可以看出轴上光强分布是参数 μ , 菲涅耳数 N_F 及截断系数 α 的函数, 在 μ 取实数及菲涅耳数和截断参数一定的情况下, 相对焦移 $|\Delta z|$ 随 μ

的增加而增加; 由图 2 可以看出由所给 (13) 式与解析结果及直接积分所得结果相符, 在对图 2(d) 的计算中, 使用联想奔月 4000 P III/500 计算机用本文所给 (13) 式计算用的 CPU 时间不到 1 s, 而直接用惠更斯-菲涅耳广义衍射积分数值计算用的 CPU 机时为 182 min, 由此可见, 用本文所给解析公式进行数值计算节约了大量机时。

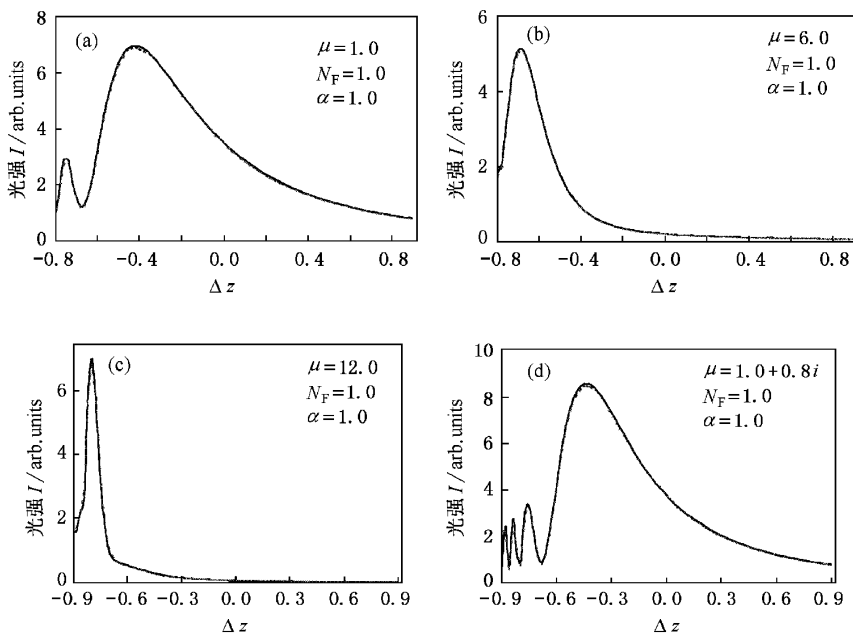


图 2 QBG 光束通过有圆孔光阑限制薄透镜系统的轴上光强分布为惠更斯-菲涅耳广义衍射积分计算结果; ——为 (13) 式的计算结果

3 结 语

基于圆域函数可表示为复高斯函数的叠加, 本文得到了 QBG 光束通过具有光阑限制的一阶

ABCD 光学系统传输场分布的解析公式. 作为例子, 计算了 QBG 光束通过光阑半径为 a 的薄透镜系统后的轴上光强分布, 利用本文公式所给结果与直接从惠更斯-菲涅耳广义衍射积分计算结果很好相符, 并且大量节约了机时, 显示了本文所用方法的

优点. 文中所得解析公式可为分析 QBG 光束在通过有光阑限制的光学系统的传输特性提供极大的方便.

[1] C. F. R. Caron , R. M. Potvliege , *Opt. Commun.* , **164** (1999) 83.

[2] S. A. Collins , *J. Opt. Soc. Am.* , **60**(1970) ,1168.

[3] K.M. Liang ,Methods of Mathematical Physics(3rd Edition) (Higher Education Press ,Beijing ,1999) ,p. 342[梁昆森 ,数学物理方法(第三版) [高等教育出版社 ,北京 ,1998) 第 342 页]

[4] B. Zhang ,B. D. Lü , *Acta Phys. Sin.* , **47**(1998) ,1(in Chinese) [张彬、吕百达 ,物理学报 **47**(1998) ,1].

[5] J. Huang *et al.* , *Acta Phys. Sin.* , **47**(1998) ,1289(in Chinese) [黄菁等 ,物理学报 **47**(1998) ,1289].

[6] J. J. Wen , M. A. Breazeale , *J. Acoust. Soc. Am.* , **83** (1988) ,1752.

[7] A. Erdelyi *et al.* , Tables of Integral Transforms (McGraw-Hill , New York , 1954) .

PROPAGATION OF QBG BEAMS THROUGH AN APERTURED
 $ABCD$ OPTICAL SYSTEM*

WANG XI-QING

(Department of Applied Physics , Southwest Jiaotong University , Chengdu 610031 ,China)

LÜ BAI-DA†

(Institute of Laser Physics and Chemistry , Sichuan University , Chengdu 610064 ,China)

(Received 30 August 2000 ; revised manuscript received 11 November 2000)

ABSTRACT

Based on the generalized Huygens-Fresnel diffraction integral , the propagation of the Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence (QBG beams) through a circle-apertured $ABCD$ optical system has been studied. In our treatment the circle function is expanded into a sum of complex Gaussian functions , thus a closed-form propagation expression of QBG beams has been derived. As an application example , numerical calculations have been performed for the focusing of QBG beams by an apertured lens. The calculatied results have shown the advantage of our method , and are in good agreement with those obtained by the straightforward numerical integration of the generalized diffraction formula.

Keywords : QBG beams , aperture , $ABCD$ optical system , propagation property

PACC : 4230 , 4290

* Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No. 416-2. 1. 2).
† Guest professor at Southwest Jiaotong University.