

黑洞的普朗克绝对熵公式

李传安

(菏泽教育学院物理系, 菏泽 274016)

(2000 年 9 月 28 日收到 2000 年 12 月 7 日收到修改稿)

利用黑洞热力学第一定律和第三定律分别导出黑洞的普朗克绝对熵公式, 该公式表明黑洞熵与黑洞视界的全面积成正比. 并进一步证明了黑洞的普朗克绝对熵就是经典热力学熵.

关键词: 黑洞, 视界, 视界温度, 普朗克绝对熵
 PACC: 9760L, 0420

1 引言

黑洞热力学把黑洞熵看作与事件视界面积成正比的量, $S = k_B A/4$, 式中 A 为黑洞的外视界面积. 这样定义的黑洞熵, 对于双视界面黑洞, 当视界温度趋于零时, 黑洞的熵并不趋于零, 不能满足能斯特定理, 因此对于黑洞熵的定义, 依然存在争议^[1-3], 文献[4]研究了内视界的 Hawking 吸收后, 考虑到内视界对黑洞熵的贡献, 利用贝根斯坦-斯马尔公式给出 Kerr 黑洞的普朗克绝对熵, 满足了能斯特定理. 文献[5]给出了修正后的黑洞熵, 虽满足了能斯特定理, 但在推证过程中未涉及到角动量和电荷的变化对黑洞熵是否产生影响. 本文一是考虑内、外视界各参量均应对黑洞熵有影响, 二是考虑到黑洞的质量、角动量、电荷的变化也均应对黑洞的熵产生影响, 利用黑洞热力学第一定律和第三定律严格导出黑洞的普朗克绝对熵公式, 并进一步证明了黑洞熵就是经典热力学熵.

2 黑洞的普朗克绝对熵公式

Kerr-Newman 黑洞为双视界面黑洞, 视界位置为

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}, \quad (1)$$

$$dr_{\pm} = dM \pm [2MdM - (2JdJ)/M^2 + (2J^2dM)/M^3 - 2QdQ]/(r_+ - r_-). \quad (2)$$
 由黑洞热力学第一定律

$$dM = TdS + \Omega dJ + VdQ, \quad (3)$$
 则

$$dS = (dM - \Omega dJ - VdQ)/T. \quad (4)$$

(4) 式给出了黑洞熵的变化与各参变量之间的关系. 对于双视界面的黑洞, 考虑到内、外视界对黑洞熵均应有贡献^[4], 外视界对黑洞熵的贡献为

$$dS_+ = (dM - \Omega_+ dJ - V_+ dQ)/T_+,$$
 内视界对黑洞熵的贡献为

$$dS_- = (dM - \Omega_- dJ - V_- dQ)/T_-,$$
 内、外视界对黑洞熵的共同贡献为 $dS = dS_+ + dS_-$, 于是可得到

$$dS = (dM - \Omega_+ dJ - V_+ dQ)/T_+ + (dM - \Omega_- dJ - V_- dQ)/T_-. \quad (5)$$
 将 $T_{\pm} = K_{\pm}/2\pi k_B$, $K_{\pm} = (r_+ - r_-)/[2(r_{\pm}^2 + J^2/M^2)]$, $\Omega_{\pm} = (J/M)/(r_{\pm}^2 + J^2/M^2)$, $V_{\pm} = Qr_{\pm}/(r_{\pm}^2 + J^2/M^2)$ 代入(5) 式整理可得到

$$dS = 2\pi k_B r_+ dr_+ - 2\pi k_B r_- dr_-. \quad (6)$$
 经过一个过程黑洞熵的变化

$$\int_{S_0}^S dS = 2\pi k_B \int_{r_{+0}}^{r_+} r_+ dr_+ - 2\pi k_B \int_{r_{-0}}^{r_-} r_- dr_-. \quad (7)$$
 对上式积分后整理可得到

$$S = \pi k_B (r_+^2 - r_-^2) + C_0, \quad (8)$$
 式中 $C_0 = S_0 - \pi k_B (r_{+0}^2 - r_{-0}^2)$, 下面利用 $T \rightarrow 0$ 时, $S \rightarrow 0$, 定出 C_0 值. 由上面给出的 $T_{\pm}$ 和 $K_{\pm}$ 的关系, 不难得到当 $T_{\pm} = 0$ 时, $r_+ = r_-$, 再由 $T_{\pm} = 0$ 时, $S = 0$, 可推得 $C_0 = 0$, 于是就得到 $S_0 = \pi k_B (r_{+0}^2 - r_{-0}^2)$, 这正是初始状态时黑洞的普朗克绝对熵, 把 $C_0 = 0$ 代入(8) 式, 则黑洞的普朗克绝对熵可表示为

$$S = \pi k_B (r_+^2 - r_-^2). \quad (9)$$
 用黑洞视界面积表示, 即

$$S = k_B (A_+ + A_-)/4, \quad (10)$$
 式中 $A_+ = 4\pi(r_+^2 + J^2/M^2)$, $A_- = 4\pi(r_-^2 + J^2/M^2)$.

其物理含义是,外视界面积取正值.内视界面积取负值.定义黑洞视界的全面积为内、外视界面积的代数和,用 $\tilde{A}$ 表示,则

$$\tilde{A} = A_+ + A_- . \tag{11}$$

于是(10)式可以化为

$$S = k_B \tilde{A} / 4 . \tag{12}$$

(12)式为黑洞的绝对熵公式,它表明黑洞的普朗克绝对熵是与黑洞视界的全面积成正比的.这与过去人们定义的熵的形式完全一致.对于单视界面黑洞,全面积就是外视界面积,这就是过去人们所定义的黑洞熵.

3 黑洞的熵亦满足能斯特定理

熵是表征无序程度的物理量,显然当系统的温度趋于零时,熵也应趋于零,对 Kerr-Newman 黑洞

$$T_{\pm} = (r_+ - r_-) / [4\pi k_B (r_{\pm}^2 + J^2 / M^2)] . \tag{13}$$

由(9)式可求得

$$S = \pi k_B (r_+ + r_-) (r_+ - r_-) . \tag{14}$$

当黑洞的视界温度趋于零时,必有 $r_+ \rightarrow r_-$,代入(14)式,必有 $S \rightarrow 0$,这就说明我们所给出的黑洞的普朗克绝对熵亦满足能斯特定理.由宇宙监督原理,不难得到对极端黑洞的情况各参量之间必须满足

$$M^2 \rightarrow (Q^2 + \sqrt{4J^2 + Q^4}) / 2 . \tag{15}$$

4 利用热力学第三定律修正后的黑洞熵

仍以黑洞熵与视界面积成正比为前提,利用热力学第三定律对过去定义的黑洞熵进行修正,使其成为能满足能斯特定理的黑洞熵.过去定义的黑洞熵为

$$S = k_B A / 4 , \tag{16}$$

对于 Kerr-Newman 黑洞,式中

$$\begin{aligned} A &= 8\pi (M^2 + M \sqrt{M^2 - J^2 / M^2 - Q^2} - Q^2 / 2) \\ &= 4\pi (r_+^2 + M^2 / J^2) \end{aligned} \tag{17}$$

是外视界面积,记作 A_+ ,为了使(16)式满足热力学第三定律,加修正项 δ , δ 应为黑洞的质量、角动量及电量的函数,即 $\delta = \delta(M, J, Q)$,于是修正后的黑洞熵可表示成

$$S = k_B A_+ / 4 + \delta . \tag{18}$$

Kerr-Newman 黑洞的视界温度由(13)式给出.对于

黑洞的极端情况,即 $T_{\pm} \rightarrow 0$ 时,由(13)式不难看出必有 $r_+ \rightarrow r_-$,由热力学第三定律知道,当 $T_{\pm} \rightarrow 0$ 时,必有 $S \rightarrow 0$,由此可推得当 $S \rightarrow 0$ 时.则 $T_{\pm} \rightarrow 0$,必有 $r_+ \rightarrow r_-$.利用(18)式可得到

$$\lim_{T_{\pm} \rightarrow 0} k_B A_+ / 4 + \delta \rightarrow 0 , \tag{19}$$

必导致

$$\lim_{r_+ \rightarrow r_-} k_B A_+ / 4 + \delta \rightarrow 0 , \tag{20}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \delta &= - \lim_{r_+ \rightarrow r_-} k_B A_+ / 4 \\ &= - 4\pi k_B (r_-^2 + J^2 / M^2) / 4 , \end{aligned} \tag{21}$$

式中 $4\pi (r_-^2 + J^2 / M^2)$ 为内视界的面积,令 $A_- = - 4\pi (r_-^2 + J^2 / M^2)$,则 $\delta = k_B A_- / 4$,代入(18)式可得到修正后的黑洞熵,即

$$S = k_B (A_+ + A_-) / 4 .$$

这就是(10)式,整理可得到(12)式,进一步证实了结果的正确性.

5 黑洞熵就是经典热力学熵

对于一个偏离平衡态不远的非平衡态系统,我们总可以认为局域都是平衡的,因此在局域内热力学基本等式仍然成立,按照普里高津的观点,将熵增量写成

$$dS = d_i S + d_e S \tag{22}$$

的形式.式中 $d_e S$ 表示系统与环境交换物质和能量引起系统熵的变化,称为熵流, $d_i S$ 为系统内部产生的熵,当系统的熵产生率为零时,则

$$dS = d_e S , \tag{23}$$

黑洞可视为一个开放系统,由物质的变化引起的熵流密度

$$j_s = \sum_i \frac{u_i}{T} d_e n_i , \tag{24}$$

式中 T 为温度, u_i 为化学势, $d_e n_i$ 为第 i 种组元的流密度,通过整个黑洞视界面的熵流为

$$d_e S = \int_{EH} j_s dA . \tag{25}$$

将(24)式代入(25)式整理可得到

$$\begin{aligned} d_e S &= \frac{1}{T} \int_{EH} \sum_i u_i d_e n_i dA \\ &= \frac{1}{T} \sum_i u_i dn_i , \end{aligned} \tag{26}$$

式中 $\sum_i u_i dn_i$ 为流经视界面的物质的能量^[6],利用

相对论中的质能关系可表示为

$$dM = \sum_i u_i dn_i, \quad (27)$$

代入(26)式,便得到当这部分能量流过视界面时,形成的熵流为

$$d_e S = \frac{1}{T} dM, \quad (28)$$

式中 T 为视界温度. 而当 dM 的物质流过外视界面经过单向膜区. 再流过内视界后,就使黑洞的质量增加了 dM . 由(28)式容易看出,当 dM 的物质流过

内、外视界面时,外视界的熵流为 $d_e S_+ = \frac{1}{T_+} dM$,内

视界的熵流为 $d_e S_- = -\frac{1}{T_-} dM$,因此可得到当黑洞

的质量变化为 dM 时,整个系统熵的变化为内、外视界处熵流的代数和,即 $d_e S = d_e S_+ + d_e S_-$,于是得到

$$dS = d_e S = \frac{1}{T_+} dM - \frac{1}{T_-} dM. \quad (29)$$

利用视界处各参量的关系能得到

$$dM = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}} dr_{\pm}. \quad (30)$$

将(30)式代入(29)式整理可得到

$$dS = 2\pi k_B r_+ dr_+ - 2\pi k_B r_- dr_- + 2\pi k_B a^2 \left(\frac{dr_+}{r_+} - \frac{dr_-}{r_-} \right), \quad (31)$$

式中 a 为单位质量的角动量,利用(30)式可得到

$\frac{dr_+}{r_+} - \frac{dr_-}{r_-} = 0$,于是(31)式可化为(6)式,积分后整

理便可得到(12)式.

从以上推导可以看出,仅仅从经典热力学出发,

结合黑洞的有关参量. 同样可得到黑洞的普朗克绝对熵. 这就进一步表明,黑洞热力学与经典热力学不仅仅是一种形式上的相对应,而的确具有实际的热性质,从而还说明了黑洞的普朗克绝对熵仅是用黑洞参量所表示的经典热力学熵.

6 利用公式求黑洞的普朗克绝对熵

将 Kerr-Newman 黑洞的度规张量代入

$$A_{\pm} = \pm \int_{EH} \sqrt{g_{\pm}} d\theta d\varphi, \\ g_{\pm} = \begin{vmatrix} g^{22} & g^{23} \\ g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}_{r=r_{\pm}},$$

求出 $\tilde{A}$,再代入(12)式,整理可得到(14)式.

将 $r_{\pm} = M_{\pm} \sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}$ 代入(14)式可得到 Kerr-Newman 黑洞的普朗克绝对熵

$$S = 4\pi k_B M \sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}. \quad (32)$$

令(32)式中的 $Q = 0$,可得到 Kerr 黑洞的普朗克绝对熵

$$S = 4\pi k_B M \sqrt{M^2 - J^2/M^2}. \quad (33)$$

令(32)式中的 $J = 0$,可得到荷电黑洞的普朗克绝对熵

$$S = 4\pi k_B M \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (34)$$

令(32)式中的 J 和 Q 同时为零,可得到史瓦西黑洞的普朗克绝对熵

$$S = 4\pi k_B M^2. \quad (35)$$

这结果说明,我们给出的黑洞熵,既满足能斯特定理,又能平滑地过渡到单视界面的史瓦西黑洞熵.

- [1] S. W. Hawing, G. Horowitz, S. Ross, *Phys. Rev.*, **D51** (1995), 4302.
- [2] R. M. Wald, *Phys. Rev.*, **D56** (1997), 6467.
- [3] D. J. Loran, W. A. Hiscock, P. R. Anderson, *Phys. Rev.*, **D52** (1995), 4554.
- [4] Z. Zhao, J. Y. Zhu, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 1558 (in Chi-

nese) [赵峥、朱建阳,物理学报,48(1999),1558].

- [5] H. Lin, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 1413 (in Chinese) [林海,物理学报,49(2000),1413].
- [6] B. K. Ma *et al.*, *Thermodynamics and Statistical Physical* (People's Education Press, Chongqing), p. 139 (in Chinese) [马本堃等,热力学与统计物理学, (人民教育出版社,重庆), 第 139 页].

THE PLANCK ABSOLUTE ENTRORY OF THE BLACK HOLE

LI CHUAN-AN

(*Department of Physics, Heze Education College, Heze 274016, China*)

(Received 28 September 2000 ; revised manuscript received 7 December 2000)

ABSTRACT

Using the first and third law of the black hole mechanics, we have derived the formula of the Planck absolute entrophy of the black hole. The formula represents that the entrophy of the black hole should be propotional to the total area of the inner and outer horizons. And we have proven that the Planck absolute entrophy of the black hole should be the classical thermodynamic entropy.

Keywords : black hole, event horizon, temperature of horizon, Planck absolute entrophy

PACC : 9760L, 0420