

Tavis-Cummings 模型中原子间偶极相互作用 对场熵演化特性的影响^{*}

黄春佳 贺慧勇 厉江帆 周 明

(长沙电力学院物理与信息工程系,长沙 410077)

(2001 年 8 月 15 日收到,2001 年 10 月 10 日收到修改稿)

研究了单模辐射场与耦合双原子相互作用系统场熵的演化特性,讨论了原子间偶极相互作用对场熵演化特性的影响.研究表明,当原子间偶极-偶极相互作用不太强时,场熵的时间演化行为与单光子 J-C 模型相似;当原子间偶极-偶极相互作用足够强时,场熵的时间演化行为与双光子 J-C 模型相似.

关键词:单模辐射场,耦合双原子,场熵演化

PACC:4250

1. 引言

光场与原子相互作用系统的量子特性是近代量子光学研究的中心内容.近几十年来,人们利用 Jaynes-Cummings(J-C)模型对光场与原子相互作用系统的许多量子特性,如原子粒子布居的周期崩塌与回复、原子算符的偶极压缩、光场的压缩特性和相干特性等,进行了广泛深入的研究,并作了多种形式的推广^[1-3].自从 Phoenix 和 Knight(P-K)等人将熵理论应用于量子光学领域以来,光场与原子相互作用系统中场熵演化规律的研究很快引起人们的重视并得到了一系列有重要意义的结果^[4-10].根据 P-K 量子熵理论,在光场-原子相互作用系统中,光场(原子)熵演化行为反映了光场与原子关联程度的演化特性,熵越高,关联越强.如果光场和原子在初始时刻均处于纯态,彼此无关联,则光场-原子全系统的熵(S)为零且不随时间变化.根据 Araki-Lieb 不等式^[11]

$$|S_a - S_f| \leq S \leq |S_a + S_f|, \quad (1)$$

在 $t > 0$ 的任何时刻,光场与原子的熵相等.

然而,以往基于 J-C 模型的有关光场-原子系统中场熵演化规律的研究,没有考虑原子间的相互作用. Tavis-Cummings(T-C)模型是描述光场与耦合双原子相互作用的理论模型,研究表明,原子间的偶极相互作用对光场与原子相互作用系统的量子特性具有非常重要的影响^[12-17].本文运用全量子理论研究了 T-C 模型中的场熵演化规律,运用数值方法,讨论

了原子间偶极-偶极相互作用对 T-C 模型中场熵演化行为的影响.

2. 态矢与原子约化密度矩阵

考虑单模光场与两个全同的有偶极-偶极相互作用的二能级原子的相互作用.设原子-光场间的耦合常数为 ϵ ,原子间偶极-偶极相互作用强度为 Ω .在旋波近似下,系统的哈密顿量为^[18]

$$H = H_0 + V, \quad (2)$$

其中

$$H_0 = \omega a^+ a + \omega_0 \sum_{l=1}^2 S_3^{(l)}, \quad (3)$$

$$V = \epsilon \sum_{l=1}^2 (a^+ S_-^{(l)} + a S_+^{(l)}) + \Omega (S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)}). \quad (4)$$

(3)(4)式中 a^+ 和 a 分别为光场的产生和湮没算符, $S_3^{(l)}$ 和 $S_{\pm}^{(l)}$ 为第 l ($l = 1, 2$) 个原子的赝自旋算符, ω 为光场频率, ω_0 为原子的本征跃迁频率.为简便起见,只考虑共振情形,即 $\omega = \omega_0$.

设初始时刻($t = 0$)两个原子均处于激发态,而光场处于相干态,原子-光场相互作用系统初始时刻的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |e, e, n\rangle, \\ f_n = \exp(-n_0/2) \frac{n_0^{n/2}}{\sqrt{n!}} \exp(in\varphi), \quad (5)$$

^{*} 湖南省教育厅科研计划项目(批准号 011040010128)资助的课题.

式中 n_0 为辐射场初始平均光子数, φ 为相位角, 可为任意值, 为简便起见, 本文取 $\varphi = 0$.

设 t 时刻系统状态演化为

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha(n, t) |e, g, n+2\rangle + \beta(n, t) |e, g, n+1\rangle + \gamma(n, t) |g, e, n+1\rangle \right], \quad (6)$$

将(6)式代入薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi'(t)\rangle = V' |\psi'(t)\rangle, \quad (7)$$

可解得

$$\alpha(n, t) = \beta_0(n) + \beta_1(n) \exp[i\alpha_1(n)t] + \beta_2(n) \exp[i\alpha_2(n)t], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \beta(n, t) = & \{-\mathcal{X}(n+1)\epsilon^2\beta_0(n) + [\alpha_1^2(n) - \mathcal{X}(n+1)\epsilon^2 + \alpha_1(n)\Omega]\beta_1(n) \\ & \times \exp[i\alpha_1(n)t] + [\alpha_2^2(n) - \mathcal{X}(n+1)\epsilon^2 + \alpha_2(n)\Omega]\beta_2(n) \\ & \times \exp[i\alpha_2(n)t]\} (2\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon^2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \alpha(n, t) = & \alpha(n, 0) \\ = & -\{\alpha_1(n)\beta_1(n) \exp[i\alpha_1(n)t] + \alpha_2(n) \\ & \times \beta_2(n) \exp[i\alpha_2(n)t]\} (2\epsilon\sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

(8)–(10)式中

$$\alpha_1(n) = \frac{1}{2}(-\Omega + \sqrt{24\epsilon^2 + 16n\epsilon^2 + \Omega^2}) \quad (11)$$

$$\alpha_2(n) = \frac{1}{2}(-\Omega - \sqrt{24\epsilon^2 + 16n\epsilon^2 + \Omega^2}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \beta_0(n) = & [\alpha_1(n)\alpha_2(n) + \mathcal{X}(n+1)\epsilon^2]f_n \\ & [\alpha_1(n)\alpha_2(n)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_1(n) = \mathcal{X}(n+1)\epsilon^2 f_n / \{\alpha_1(n) [\alpha_1(n) - \alpha_2(n)]\}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(n) = & -\mathcal{X}(n+1)\epsilon^2 f_n / \{\alpha_2(n) [\alpha_1(n) \\ & - \alpha_2(n)]\}. \end{aligned} \quad (15)$$

3. 场熵的演化特性

由系统的初始条件及(1)式可知, 在 $t > 0$ 的任意时刻, 系统的场熵和原子熵总是相等的. 因此, 可利用原子约化密度矩阵求出系统场熵的表达式.

根据态矢表达式(6)式, 容易得到原子约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_a(t) = & \text{Tr}_f [|\psi'(t)\rangle \langle \psi'(t)|] \\ = & \begin{pmatrix} \sum_n \alpha(n, t) \alpha^*(n, t) & \sum_n \alpha(n, t) \beta^*(n, t) & \sum_n \alpha(n, t) \gamma^*(n, t) & \sum_n \alpha(n, t) \delta^*(n, t) \\ \sum_n \beta(n, t) \alpha^*(n, t) & \sum_n \beta(n, t) \beta^*(n, t) & \sum_n \beta(n, t) \gamma^*(n, t) & \sum_n \beta(n, t) \delta^*(n, t) \\ \sum_n \gamma(n, t) \alpha^*(n, t) & \sum_n \gamma(n, t) \beta^*(n, t) & \sum_n \gamma(n, t) \gamma^*(n, t) & \sum_n \gamma(n, t) \delta^*(n, t) \\ \sum_n \delta(n, t) \alpha^*(n, t) & \sum_n \delta(n, t) \beta^*(n, t) & \sum_n \delta(n, t) \gamma^*(n, t) & \sum_n \delta(n, t) \delta^*(n, t) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

系统的场(原子)熵为

$$\begin{aligned} S_f(t) = & S_a(t) = -\text{Tr}_a [\rho_a(t) \ln \rho_a(t)] \\ = & -\sum_{j=1}^4 \lambda_j \ln \lambda_j, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 为原子约化密度矩阵的本征值, 可通过求解方程

$\lambda^4 - \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda = 0$ (18) 得到. (18) 式中, A 和 B 由原子约化密度算符 ρ_a 的矩阵元确定:

$$\begin{aligned} A = & \rho_{11}\rho_{22} + \rho_{11}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{44} \\ & + \rho_{33}\rho_{44} - (\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{13}\rho_{31} + \rho_{14}\rho_{41} \\ & + \rho_{23}\rho_{32} + \rho_{24}\rho_{42} + \rho_{34}\rho_{43}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B = & -\rho_{11}\rho_{22}\rho_{33} - \rho_{11}\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{11}\rho_{33}\rho_{44} - \rho_{22}\rho_{33}\rho_{44} \\ & + \rho_{11}\rho_{23}\rho_{32} + \rho_{11}\rho_{24}\rho_{42} + \rho_{11}\rho_{34}\rho_{43} + \rho_{22}\rho_{13}\rho_{31} \\ & + \rho_{22}\rho_{14}\rho_{41} + \rho_{22}\rho_{34}\rho_{43} + \rho_{33}\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{33}\rho_{14}\rho_{41} \\ & + \rho_{33}\rho_{24}\rho_{42} + \rho_{44}\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{44}\rho_{13}\rho_{31} + \rho_{44}\rho_{23}\rho_{32} \\ & - \rho_{12}\rho_{23}\rho_{31} - \rho_{12}\rho_{24}\rho_{41} - \rho_{13}\rho_{21}\rho_{32} \\ & - \rho_{13}\rho_{34}\rho_{41} - \rho_{14}\rho_{21}\rho_{42} - \rho_{14}\rho_{31}\rho_{43} \\ & - \rho_{23}\rho_{34}\rho_{42} - \rho_{24}\rho_{32}\rho_{43} . \end{aligned} \tag{20}$$

解方程 (18) 式 ,得到原子约化密度矩阵的本征值为

$$\lambda_1 = 0 , \tag{21}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6} \left[2 - \frac{2 \cdot 2^{1/3} (3A - 1)}{\zeta} + 2^{2/3} \zeta \right] , \tag{22}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} \left[2 + \frac{\mathcal{X} - 2)^{1/3} (3A - 1)}{\zeta} + (-2)^{2/3} \zeta \right] \tag{23}$$
$$\lambda_4 = \frac{1}{6} \left[2 - \frac{\mathcal{X} - 1)^{2/3} 2^{1/3} (3A - 1)}{\zeta} - (-1)^{1/3} 2^{2/3} \zeta \right] , \tag{24}$$

其中

$$\zeta = \left[2 - 9A - 27B + \sqrt{4(3A - 1)^3 + (-2 + 9A + 27B)^2} \right]^{1/3} . \tag{25}$$

为了揭示 T-C 模型中原子间偶极-偶极相互作用对场熵时间演化特性的影响 ,分别选取不同的 Ω/ϵ 值对 (17) 式作数值计算 ,得到如图 1 所示的结果 .

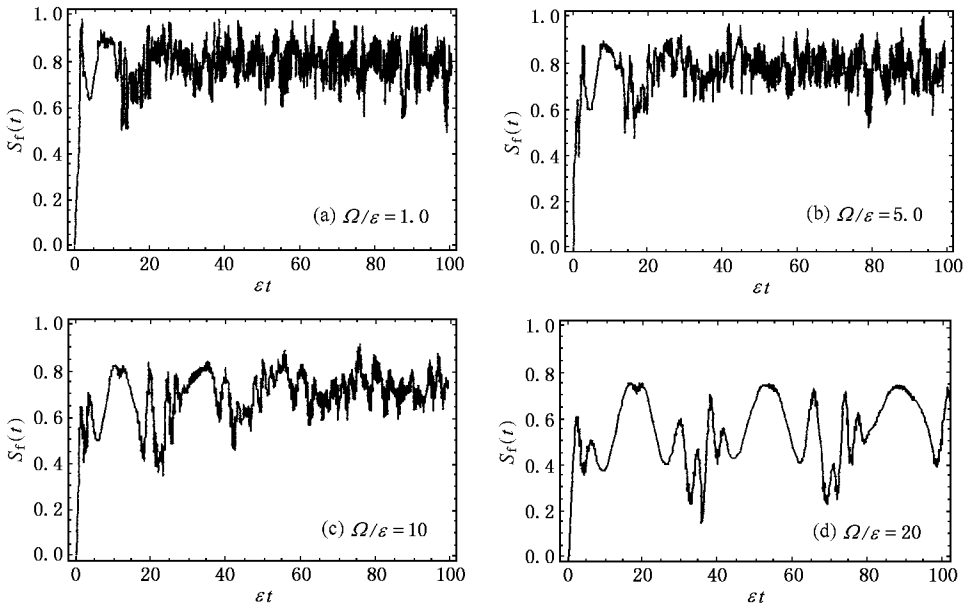


图 1 场熵 $S_f(t)$ 的时间演化规律 ($n_0 = 5, \epsilon = 0.2$)

从图 1 可以看出 ,T-C 模型中场熵的时间演化具有如下的特点 :当原子间偶极-偶极相互作用不太强 (如 $\Omega/\epsilon = 1.0$) 时 ,场熵的时间演化行为与单光子 J-C 模型相似 ,随时间做不规则振荡 ,如图 1(a) (b) 所示 ,随着 Ω/ϵ 值的增大 ,场熵的演化逐渐显现出一定的周期性 ,如图 1(b) — (d) 所示 ,当 Ω/ϵ 值足够大时 ,场熵的时间演化表现出类似于双光子 J-C 模型中场熵演化的周期性 ,如图 1(d) 所示 .T-C 模型中场熵的时间演化的上述特点可以这样理解 :强耦合的双原子系统在与光场发生相互作用的过程中 ,由于占据主导地位的是单光子跃迁 ,其场熵演化规律与单光子 J-C 模型相似 ,不具有周期性 ,而在光场较强的情况下 ,强耦合的双原子系统可以等效为一个级联三能级原子 ,原子间偶极-偶极相互作用造成了

“中间能级”的移位 ,使得系统中单光子跃迁失谐而双光子跃迁占据主导地位^[18] ,因此其场熵演化规律与双光子 J-C 模型相同 ,具有明显的周期性 .

与图 1 相对应 ,图 2 给出了原子布居差 $S_z(t) = \sum_n \{ |a(n,t)|^2 - |b(n,t)|^2 \}$ 的数值计算结果 .比较图 1 与图 2 ,容易看出 ,在原子布居差崩塌的时段内 ,场熵逐渐演化到最大值 ,此时光场与原子强烈地缠绕 ,而在原子布居差回复的时段内 ,场熵逐渐演化到最小值 ,此时光场与原子接近于退缠绕状态 .当原子间的耦合逐渐增强 (Ω/ϵ 值逐渐增大) 时 ,系统中光场与原子的缠绕与退缠绕逐渐显现出一定的周期性 .这一结果再一次显示了场熵与光场-原子关联程度之间的密切关系 .

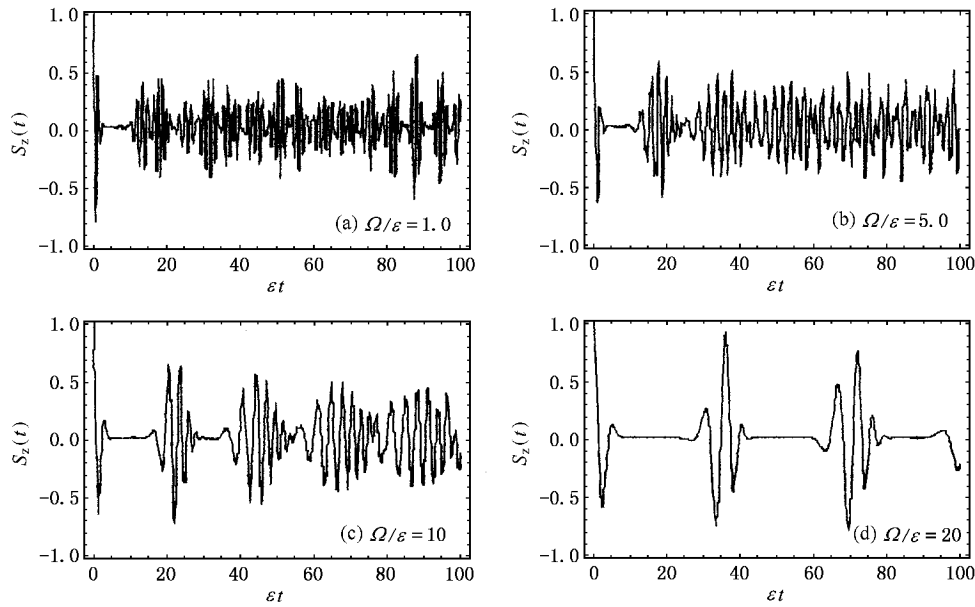


图 2 原子布居差 $S_z(t)$ 的时间演化规律 ($n_0 = 5$, $\varepsilon = 0.2$)

4. 结 论

采用全量子理论和数值计算方法,研究了 T-C 模型中场熵的演化特性,着重讨论了原子间偶极-偶极相互作用强度对场熵的演化特性的影响.结果表

明:当原子间偶极-偶极相互作用不太强时,场熵的时间演化行为与单光子 J-C 模型相似,随时间做不规则的振荡;随着原子间偶极-偶极相互作用的增强,场熵的演化逐渐显现出一定的周期性;当原子间偶极-偶极相互作用足够强时,场熵的时间演化表现出类似于双光子 J-C 模型中场熵演化的周期性.

[1] Jaynes E T and Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89

[2] Lai W K, Buzek V and Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6043

[3] Peng J S and Li G X 1993 *Phys. Rev. A* **47** 3167

[4] Phoenix S J D and Knight P L 1988 *Ann. Phys. (N.Y.)* **186** 381

[5] Phoenix S J D and Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023

[6] Buzek V, Moya-Cessa H and Knight P L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8190

[7] Phoenix S J D and Knight P L 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 116

[8] Fang M F and Zhou P 1993 *Acta Opt. Sin.* **13** 799 [in Chinese] 方卯发、周 鹏 1993 光学学报 **13** 799

[9] Fang M F and Zhou P 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 570 [in Chinese] [方卯发、周 鹏 1994 物理学报 **43** 570]

[10] Fang M F 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1776 [in Chinese] 方卯发 1994 物理学报 **43** 1776

[11] Araki H and Lieb E 1970 *Commun. Math. Phys.* **18** 160

[12] Tavis M and Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379

[13] Griffin R D and Harris S M 1982 *Phys. Rev. A* **25** 1538

[14] Ficek Z and Sanders B C 1990 *Quant. Opt.* **2** 269

[15] Luo Z F, Xu Z Z and Xu L 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1950 [in Chinese] 罗振飞、徐至展、徐 磊 1992 物理学报 **41** 1950

[16] Tian Y H and Peng J S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 67 [in Chinese] 田永红、彭金生 2000 物理学报 **49** 67

[17] Huang C J, Zhou M et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2159 [in Chinese] 黄春佳、周 明等 2000 物理学报 **49** 2159

[18] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing : Science Press) pp410-433 [in Chinese] 彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京:科学出版社)第 410 和 433 页]

Influence of the dipole-dipole interaction between atoms on the entropy properties of field in the Tavis-Cummings model

Huang Chun-Jia He Hui-Yong Li Jiang-Fan Zhou Ming

(*Department of Physics and Information Engineering , Changsha University of Electric Power , Changsha 410077 , China*)

(Received 15 August 2001 ; revised manuscript received 10 October 2001)

Abstract

The entropy evolution properties of the field interacting with two coupling-atoms are studied by means of quantum theory . Using numerical method , the influence of the dipole-dipole interaction between atoms on the entropy evolution properties of the field in the Tavis-Cummings(T-C) model is discussed . The results indicate that the entropy evolution behaviour of the field in T-C model is similar to the single-photon J-C model if the dipole-dipole interaction between atoms is weaker and it is same as the double-photon J-C model if the dipole-dipole interaction between atoms is strong enough .

Keywords : single-mode field , two coupling-atoms , field entropy evolution

PACC : 4250