第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1596-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51,No.7,July,2002

旋转超导体中的电流与电磁场*

欧阳世根 关 毅 佘卫龙†
(中山大学电光材料与技术国家重点实验室,物理系,广州 510275)
(2001 年 7 月 11 日收到;2001 年 11 月 23 日收到修改稿)

采用半经典理论方法,对旋转超导体内的电流和电磁场进行理论分析.在把非惯性力场等效为真实力场并假设其适用于量子力学的基础上,获得超导电子所满足的薛定谔方程和概率密度流表达式.发现超导电子的正则动量和空间相位的梯度有正比例的关系;发现在没有外电场和外磁场情况下,匀速转动的超导体内出现净电荷电场、磁场,表面出现净电荷及超导电流.

关键词:旋转超导体,超导电流,磁场,半经典理论
PACC:7400,7420D,7430C,7455

1. 引 言

1911 年,Onnes 首次发现了超导现象.超导现象伴随产生了许多有趣的物理效应,例如熟知的 Meissner 效应[1]和约瑟夫森效应.1933 年,Recker 和 Sauter 在实验中发现[2],当超导体旋转的时候,在超导体内就会产生一磁场.London 在 1960 年采用经典的方法,假设 London 方程在旋转超导体中仍然适用,对此进行研究[3].由于他的工作,以后该磁场就被称为 London moment.1976 年,Rystephanick 在假设惯性力与电磁力抵消的基础上,导出旋转超导体内存在着径向的电场分布和处处均匀的磁场分布的结果[4].近年来,由于高温超导的发现,超导体的实验和理论问题又引起人们极大的研究兴趣[5—8].旋转超导体中的物理问题至今尚未完全清楚,很值得进一步探讨.

超导现象本质是宏观的量子现象,应由量子力学描述.本文采用半经典半量子的方法对旋转超导体内的电流和电磁场进行讨论.在把非惯性力场等效为真实力场并假设其适用于量子力学的基础上,获得了超导粒子的薛定谔方程和概率密度流表达式,然后以一假设解代入概率密度流的表达式,获得了超导粒子的正则动量与空间相位的梯度成正比的关系.结合经典物理,我们发现粒子的总能量与概率波的动力学相位成正比.从正则动量与空间相位梯度成正比这一关系出发,我们发现尽管不存在外电场和外磁场情况下,匀速旋转超导体内仍然同时出现电场和磁场.与 Meissner 效应很相像,在超导体的表面出现了超导电流.正是这表面超导电流形成了超导体内的磁场.同时我们发现在超导体体内出现均匀的净电荷分布,并且表面有电荷分布.体内电荷和表面电荷共同形成超导体内的径向电场.London 的理论是唯象的理论,他假设 London 方程在转动的超导体中仍然适用[3].正则动量的旋度为零与 London 理论是相容的,但从 London 理论却无法独立地、逻辑地得出正则动量的旋度为零的结论.而在本文中正则动量的旋度为零是作为量子力学的一个结论而得到的.London 理论也未能指出旋转超导体中静电场的出现和超导电子密度的减少.仅存在 London 磁场,不足以使体内电子与晶格一起转动,这表明在 London 磁场外还存在一电场.Rystephanick 假设在旋转超导体中惯性力与电磁力抵消,从而得到在旋转超导体中出现一均匀磁场[4].在他的文章中并未指出非惯性系中磁场的源.而在本文中磁场是导出的,并且磁场并不是处处均匀的,特别在穿透深度中由于存在超导电流,磁场有显著的梯度,穿透深度中的超导电流就是该非惯性系中磁场的源.

* 广东省自然科学基金(批准号:980359)资助的课题.
† 通信联系人.

2. 转动超导体内的超导带电粒子的薛定谔方程

由经典物理知道，在一个存在电场 E 和磁场 B 的转动系下一带电 q，质量 m 的粒子将受到 Lorentz 力和非惯性力的作用

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + m\left[2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\right], \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为粒子在转动系下的速度，$\boldsymbol{\omega}$ 为转动系的角速度. 引入电磁矢量 A 和电势 Φ，由经典电磁学，有 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. 注意到 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -\nabla\Phi - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}). \quad (2)$$

由于惯性离心力为保守力，可引入一标量势 V，使得 $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -\nabla V$. $\boldsymbol{\omega}$ 为一均匀场，亦即无旋场，这意味着存在一惯性矢量势 $\boldsymbol{a}$ 使得 $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{a}$，容易看出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$[10] 满足这一关系，并且有 $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$. 由此，得

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla V - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}). \quad (3)$$

将(2)和(3)式代入(1)式，得

$$\boldsymbol{F} = q\left[-\nabla\Phi - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})\right] + m\left[-\nabla V - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\right].$$

将此式代入拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i$（此处 T 为粒子的动能 $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$），经化简得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$. 这里 L 为拉格朗日函数

$$L = T + q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} + m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} - q\Phi - mV.$$

容易得到正则动量 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{a}$ 和哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A} - m\boldsymbol{a})^2 + q\Phi + mV.$$

由此得到带电粒子在转动系中的薛定谔方程

$$\left[\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\hbar\nabla - q\boldsymbol{A} - m\boldsymbol{a})^2 + q\Phi + mV\right]\Psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (4)$$

以 Ψ^* 乘(4)式，减去 Ψ 与(4)式的复共轭的乘积，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) + \nabla \cdot \left[\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) - \frac{1}{m}(q\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{a})\Psi^*\Psi\right] = 0. \quad (5)$$

由此，超导体内的电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar q}{2m}[\Psi\nabla\Psi^* - \Psi\nabla\Psi] - \frac{q}{m}(q\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{a})\Psi^*\Psi. \quad (6)$$

3. 匀速转动的超导体

匀速转动的情况特别简单，此时磁场和电场均与时间无关，从而电荷分布和电流分布也与时间无关. 在此情况下，超导体处于力学平衡，为一等势体，即 $q\Phi + mV = \mathrm{const}$. 对此式等号两边取梯度，得

$$\boldsymbol{E} = \frac{m}{q}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \quad (7)$$

(7)式表明在匀速转动的超导体内出现一静电场. 由于超导体的载流子库柏对的电荷 q 为负电荷，所以电场的方向是离心向外的. 设超导体没有转动时，体内载流电荷密度为 n_0，转动后密度为 n，那么，由高斯定律有 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = (n - n_0)q/\varepsilon_0$. 将(7)式代入此式，得

$$n = n_0 - \frac{2m\varepsilon_0\omega^2}{q^2} < n_0 \quad (n_0 \sim 10^{24}).$$

从上式可以看出，超导体转动时体内的载流电荷密度比在没有转动时少，但仍然是均匀分布的. 体内电荷密度减少，电荷跑到表面上. 在 London 理论中假设电荷密度与未转动时一样，表面也没有面电荷分布[3]，我们的理论结果显然与此不同. 可以看出，体内电荷分布和表面电荷分布共同形成体内的电场. 由于电荷密度仍然均匀分布，假设薛定谔方程(7)具有形式解 $\Psi = \sqrt{n}\exp[\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{r}, t)]$. 将此式代入(6)式，并注意到 n 的空间均匀性，得

$$\boldsymbol{J} = \frac{n\hbar q}{m}\nabla\varphi - \frac{nq}{m}(q\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{a}), \quad (8)$$

注意到 $\boldsymbol{J} = nq\boldsymbol{v}$，有

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{a} = \hbar\nabla\varphi. \quad (9)$$

这表明正则动量 P 为一无旋量，它和空间相位的梯度成正比.（反过来，如果假设正则动量和相位存在这一关系，并且假设超导粒子在超导体内均匀分布，就可以重新得到(8)式.）对(8)式等号两边取旋度，

并注意到 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的旋度分别为 $\boldsymbol{B}$ 和 $2\boldsymbol{\omega}$，得$\nabla\times\boldsymbol{J}=-\frac{nq}{m}(q\boldsymbol{B}+2m\boldsymbol{\omega})$. 引入一矢量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{B}+\frac{2m}{q}\boldsymbol{\omega}$，那么，$\nabla\times\boldsymbol{J}=-\frac{nq}{m}(q\boldsymbol{B}+2m\boldsymbol{\omega})$可以改写成

$$\nabla\times\boldsymbol{J}=-\frac{nq^2}{m}\boldsymbol{\beta}.$$

显然$\nabla\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，并且注意到$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$和$\nabla\times\boldsymbol{\omega}=0$，有$\nabla\times\boldsymbol{\beta}=\mu_0\boldsymbol{J}$. 对此式等号两边取旋度，化简，得$\nabla^2\boldsymbol{\beta}=\frac{n\mu_0 q^2}{m}\boldsymbol{\beta}$，由于超导体所有的物理量都与时间无关，从连续性方程$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，得$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$. 对$\nabla\times\boldsymbol{J}=-\frac{nq^2}{m}\boldsymbol{\beta}$两边取旋度，得$\nabla^2\boldsymbol{J}=\frac{n\mu_0 q^2}{m}\boldsymbol{J}$. 引入穿透深度 $\lambda=\sqrt{\frac{m}{n\mu_0 q^2}}$（$\lambda\sim10^{-8}$m），得$\nabla^2\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{\beta}$和$\nabla^2\boldsymbol{J}=\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{J}$. 从上面的两个方程可以看出，这与静止超导体的 Meissner 效应一样，$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 都以指数的速度从表面往里面迅速衰减，在远大于穿透深度 λ 的地方为零. 这表明在转动超导体内产生一个磁场，即

$$\boldsymbol{B}=-\frac{2m}{q}\boldsymbol{\omega}. \qquad (10)$$

由于超导体的载流子库柏对的电荷是负的，该磁场的方向与角速度矢量的方向相同. Rystephanick 是在惯性力与电磁力抵消的假设下得到一磁场，且是均匀的[4]，而我们的磁场是导出的，并且在穿透深度范围内有显著的梯度，两者明显不同. 另外，我们的理论又自然地导出表面超导电流的存在，这表明在穿透深度范围内惯性力与电磁力并没有完全互相抵消. 在转动系中，该超导电流是磁场的唯一的源，这一点在 Rystephanick 的文章中并没有指出. 应该注意到这里的 E 和 B 均是转动系中的量. 在远大于穿透深度处超导电流为零，超导体内的库柏对与超导体一起转动. 在非相对论情况下（$\omega\rho\ll c$，c 为真空中的光速，ρ 为场点到转轴的距离），电场和磁场在不同参考系下的变换可以采用非相对论的形式. 在远大于穿透深度的超导体内，惯性系下的电场 E_{in}和磁场 B_{in}与 E 和 B 的关系为$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{E}+(-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{B}-\frac{(-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}{c^2}\times\boldsymbol{E}$. 将(7)和(10)式代入此两式，经化简，得 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=-\frac{m}{q}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}\approx\boldsymbol{B}=-\frac{2m}{q}\boldsymbol{\omega}$. 在超导体内带电粒子 q 与晶格一起运动，q 受到的向心力f_{c} 为 $f_{\mathrm{c}}=m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$. 因为 q 以速度$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 在惯性系下运动，它受到的 Lorentz 力为 $f_{\mathrm{L}}=q[\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}]$. 容易验证，$f_{\mathrm{L}}=m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=f_{\mathrm{c}}$. 容易看出，若在非惯性系中仅存在磁场 B 而无电场 E，则电磁场力不足以使体内电子与晶格一起转动. 亦即在 London 获得的磁场 B 外还应存在一电场.

附录 经典处理

作为对比，本文用经典力学的方法，采用 London 在文献[3]中类似的形式进行讨论，与前面一样，带电粒子在转动的非惯性系下受力为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q\left[-\nabla\Phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]+m\left[-\nabla V-\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})\right], \qquad (\mathrm{A}1)$$

式中$\boldsymbol{v}$为一速度场，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}).$$

由此得

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}+\nabla H-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{P})=0, \qquad (\mathrm{A}2)$$

式中 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}+q\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{a}$ 和 $H=\frac{1}{2}mv^2+q\Phi+mV$. 对(A2)式两边取旋度，得$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{P})=\nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{P})]$. 此式具有一个特点，假如在某时刻 t_0，正则动量场的旋度为零，那么在以后任何时刻正则动量场的旋度都为零，这与正则动量旋度为零是相容的. 这与(9)式 $\boldsymbol{P}=\hbar\nabla\varphi$ 一致. 在经典力学中，无法说明正则动量场在某一开始时刻 t_0 旋度为零的这一假设，而在量子力学这是很自然的. London 就是在假设$\nabla\times\boldsymbol{p}=0$和电荷密度不变的基础下得出旋转超导体内出现磁场和表面超导电流的. 由于正则动量旋度为零，(A2)式变为$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}+\nabla H=0$，这与哈密顿方程的形式很像. 由(9)和(A2)式，有$\nabla\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi+H\right)=0$. 这表明粒子的动力学相位与能量通过上式密切地联系在一起.

[1] Meissner W and Ochsenfeld R 1933 *Naturwiss* **21** 787
[2] Recker R, Sauter F and Haller C 1933 *Z. Phys.* **85** 772
[3] London F 1960 *Superfluid* vol **1** (New York: Dover) pp.78—83
[4] Rystephanick R G 1976 *Am. J. Phys.* **44** 647
[5] Hu L F, Zhou L, Zhang P X and Wang J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1359 (in Chinese) [胡立发、周 廉、张平祥、王金星 2001 物理学报 **50** 1359]
[6] Liu J J and Gan Z Z 2000 *Chin. Phys.* **9** 934
[7] Zhang J, Cheng Z H, Zhao T Y, Zhang S Y, Rong C B and Shen B G 2001 *Chin. Phys.* **10** 443
[8] Zhao Z W, Wen H H, Li S L, Ni Y M, Ren Z A and Che G C 2001 *Chin. Phys.* **10** 340
[9] Harris J H and Semon M D 1980 *Found. Phys.* **10** 151

Current and electromagnetic field in a rotating superconductor*

Ouyang Shi-Gen Guan Yi She Wei-Long†
(*State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies and Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China*)
(Received 11 July 2001; revised manuscript received 23 November 2001)

Abstract

In this paper, we study the current and the electromagnetic field in a rotating superconductor through semiclassical approach. A Schrödinger wave equation and probability density current of superelectrons have been obtained. It is found that the canonical momentum is directly proportional to the gradient of space phase. We also find an electric field and a magnetic field together with the superconducting current generated in a uniformly rotating superconductor even without an external electromagnetic field.

Keywords: rotating superconductor, superconducting current, magnetic field, semiclassical approach
PACC: 7400, 7420D, 7430C, 7455

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 980359).
† Author to whom correspondence should be addressed.