第 51 卷 第 8 期 2002 年 8 月
1000-3290/2002/51(08)/1808-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.8, August, 2002

介观 *RLC* 电路在热真空态下的量子涨落

汪仲清

(重庆邮电学院光电工程学院, 重庆 400065)

(2001 年 7 月 31 日收到; 2001 年 12 月 23 日收到修改稿)

利用热场动力学的方法研究了介观 *RLC* 电路在具有热噪声的真空态下电荷和磁通(电流)的量子涨落. 从而得到了有限温度下这一电路在热真空态下的量子涨落与温度的关系. 结果表明, 介观 *RLC* 电路的量子涨落不仅与电路中的元件参量和电路的共振频率 ω 有关, 而且与温度 T 有关. 温度越高, 介观 *RLC* 电路的量子噪声越大.

关键词: 介观 *RLC* 电路, 热真空态, 量子涨落

PACC: 7335, 0365

1. 引　　言

随着纳米技术和纳米电子学的发展, 电路及电子器件日益小型化, 现在已达到原子尺度的量级[1]. 显然, 当电子的输运尺度达到电子两次非弹性碰撞之间的尺度时, 必须考虑电路和器件的量子效应. 20 世纪 70 年代 Louisell[2] 讨论了 *LC* 电路的量子效应并给出了这一回路的量子噪声. 近年来, 人们对 *LC* 电路以及 *RLC* 电路的量子噪声问题进行了广泛地研究[3—9]. 但是这些研究都没有涉及热噪声的影响, 也就是说处理的是零温度状态下的态. 实际情况中电路所处的温度一般不是零. 因此, 研究在有限温度的热噪声真空态下介观电路中电荷和电流的量子涨落在理论上和实验上都是非常有意义的. 文献[10]在热场动力学(TFD)[11]理论基础之上, 用两种方法导出了介观 *LC* 电路在热真空态下量子涨落的有关结果. 本文将用 TFD[11,12] 的方法进一步研究介观 *RLC* 电路中电荷和磁通(电流)的量子涨落. 发现介观 *RLC* 电路在热真空态中的量子涨落不仅与电路中的元件参量和共振频率 ω 有关, 而且与温度 T 有关, 温度越高, 介观电路的量子涨落越大.

2. 介观 *RLC* 电路量子化处理的有关结论

对于一个与电源 $\varepsilon(t)$ 串联的 *RLC* 电路, 它的经典运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q(t) = \frac{1}{L}\varepsilon(t), \quad (1)$$

式中 $q(t)$ 为电荷, R, L 和 C 分别表示电路中的电阻、电感和电容; $\varepsilon(t)$ 为电源的电动势; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ 为无电阻 R 时, LC 电路的共振频率. 经量子化后 *RLC* 电路的 Hamiltonian 为[4]

$$H = \hbar(\omega - \mathrm{i}\lambda)a^+ a + a^+ S(t) + aS^*(t), \quad (2)$$

式中, $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$, $\lambda = \frac{R}{2L}$, $S(t) = \mathrm{i}\sqrt{\hbar/2}\frac{\varepsilon(t)}{L}$, a^+ 和 a 分别表示推广的产生和湮没算符,

$$a = \sqrt{L/(2\hbar\omega)}[j + (\lambda - \mathrm{i}\omega)q], \quad (3)$$

$$a^+ = \sqrt{L/(2\hbar\omega)}[j + (\lambda + \mathrm{i}\omega)q]. \quad (4)$$

由量子对易关系 $[q, \Phi] = \mathrm{i}\hbar$ 不难得到 $[a, a^+] = 1$, 其中 $\Phi = Lj$ 表示磁通, $j = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$ 表示回路中的电流, 则磁通和电流只相差一常量. 由(3)和(4)式可以得到

$$q = \frac{\sqrt{2\hbar\omega/L}}{2\mathrm{i}\omega}(a^+ - a), \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{2\hbar\omega L}}{2\mathrm{i}\omega}[(\lambda + \mathrm{i}\omega)a - (\lambda - \mathrm{i}\omega)a^+]. \quad (6)$$

由关系式 $[a, a^+] = 1$, 不难定义真空态和 Fock 态. 不接电源时, (2)式中 $S(t) = 0$, 电荷和电流的量子涨落已分别在真空态、压缩态以及平移压缩 Fock 态中进行了研究[6—9], 他们都没有考虑热噪声的影响. 由于实际情况的电路是处在一定温度下, 因此我们将在热真空态中来研究这一问题.

3. 热场动力学(TFD)的热真空态

研究有限温度下量子系统特性的一种有效方法

是用热场动力学理论. 在这个理论中,力学量的统计力学系综平均值可以用它在与温度有关的真空态(热真空态)中的期待值来表示. 因此,TFD 理论除了希尔伯特空间外,还引入了一个对偶空间,称为 tilde 空间,由这两个空间构成一个直积空间. 在这个直积空间中,自由度增加了一倍. 对于真实空间中的每个算符和态,在 tilde 空间中也存在相应的 tilde 算符和 tilde 态. 玻色算符 a 和 a^+ 相应的算符为 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{a}^+$,它们满足对易关系

$$[\tilde{a},\tilde{a}^+]=1,[\tilde{a},a]=[\tilde{a},a^+]=[a,\tilde{a}^+]=0. \tag{7}$$

在 TFD 理论的直积空间中,真空态就是直积态 $|0\tilde{0}>$,它仍是零温度的. 有限温度下的热真空态是通过一个由 $T(\theta)$ 表示的热正则 Bogoliubov 变换得到,记为 $|0\tilde{0}\rangle_T$,

$$|0\tilde{0}\rangle_T=T(\theta)|0\tilde{0}\rangle,$$

$$T(\theta)=\exp[-\theta(a\tilde{a}-a^+\tilde{a}^+)], \tag{8}$$

式中 θ 为一个与平均热粒子数 n_0 有关的量,$n_0=\sinh^2\theta$. n_0 与温度 T 的关系由玻色-爱因斯坦分布确定

$$n_0=[\exp(\hbar\omega/k_BT)-1]^{-1}, \tag{9}$$

ω 为场的共振频率,$\hbar$ 为普朗克常量,k_B 为玻耳兹曼常量. 热化后的玻色算符 $a(\theta)$ 和 $a^+(\theta)$ 为

$$\alpha(\theta)=T(\theta)aT^+(\theta)=ua-v\tilde{a}^+, \tag{10}$$

$$\alpha^+(\theta)=T(\theta)a^+T^+(\theta)=ua^+-v\tilde{a}, \tag{11}$$

式中 $u=\cosh\theta=\sqrt{n_0+1}$,$v=\sinh\theta=\sqrt{n_0}$,所以 $u^2+v^2=\cosh(2\theta)=1+2n_0$.

4. 介观 RLC 电路在热真空态下的量子涨落

未接电源时,(2)式中 $S(t)=0$,设此时电路处在热真空态 $|0\tilde{0}\rangle_T$. 应用(5),(6)式和上述 TFD 理论的有关结论,可以得到在热真空态 $|0\tilde{0}\rangle_T$ 下的有关平均值

$$<q>_T=0,\quad <\Phi>_T=0, \tag{12}$$

$$<q^2>_T=\frac{\hbar}{2\sqrt{(\omega_0^2-\lambda^2)L^2}}(1+2n_0)$$

$$=\frac{\hbar}{2}\frac{2\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}\left[\frac{\exp(\hbar\omega/k_BT)+1}{\exp(\hbar\omega/k_BT)-1}\right], \tag{13}$$

$$<\Phi^2>_T=\frac{\hbar L}{2(\omega_0^2-\lambda^2)^{1/2}}\omega_0^2(1+2n_0)$$

$$=\frac{\hbar}{2}\frac{2L/\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}\left[\frac{\exp(\hbar\omega/k_BT)+1}{\exp(\hbar\omega/k_BT)-1}\right]. \tag{14}$$

由(12)—(14)式可以看出,量子化后的有源 RLC 电路在热真空态下,电荷和磁通(电流)的平均值为零,它们的均方值不为零. 由此可以得到介观 RLC 电路在热真空态下的量子涨落和不确定关系

$$<(\Delta q)^2>_T=\frac{\hbar}{2}\frac{2\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}\times\left[\frac{1+\exp(-\hbar\omega/k_BT)}{1-\exp(-\hbar\omega/k_BT)}\right], \tag{15}$$

$$<(\Delta\Phi)^2>_T=\frac{\hbar}{2}\frac{2L/\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}\times\left[\frac{1+\exp(-\hbar\omega/k_BT)}{1-\exp(-\hbar\omega/k_BT)}\right], \tag{16}$$

$$<(\Delta q)^2>_T<(\Delta\Phi)^2>_T$$

$$=\frac{\hbar^2}{4}\frac{4L}{4L-R^2C}\left[\frac{1+\exp(-\hbar\omega/k_BT)}{1-\exp(-\hbar\omega/k_BT)}\right]^2$$

$$=\frac{\hbar^2}{4}\frac{4L}{4L-R^2C}\coth^2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right). \tag{17}$$

由(15)—(17)式可以看出,介观 RLC 电路在热真空态中电荷和电流都有零点涨落,这种涨落不仅与电路中元件参量和电路的共振频率 ω 有关,而且与温度 T 有关,电路的量子涨落随着温度的升高而变大. 当 $T\to0$ 时,$\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\to1$,由(15)—(17)式可以得到

$$<(\Delta q)^2>=\frac{\hbar}{2}\frac{2\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}, \tag{18}$$

$$<(\Delta\Phi)^2>=\frac{\hbar}{2}\frac{2L/\sqrt{C}}{(4L-R^2C)^{1/2}}, \tag{19}$$

$$<(\Delta q)^2><(\Delta\Phi)^2>=\frac{\hbar^2}{4}\frac{4L}{4L-R^2C}, \tag{20}$$

这与文献[6]的结果是一致的. 对于 LC 电路,可在(15)—(17)式中令 $R\to0$,得到

$$<(\Delta q)^2>_T=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\left[\frac{1+\exp(-\hbar\omega/k_BT)}{1-\exp(-\hbar\omega/k_BT)}\right], \tag{21}$$

$$<(\Delta\Phi)^2>_T=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{1+\exp(-\hbar\omega/k_BT)}{1-\exp(-\hbar\omega/k_BT)}\right], \tag{22}$$

$$<(\Delta q)^2>_T<(\Delta\Phi)^2>_T=\frac{\hbar^2}{4}\coth^2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right). \tag{23}$$

这便是文献[10]的结果.

5. 结 论

在有关 *RLC* 电路量子化处理的基础上,研究了介观 *RLC* 电路在热真空态下电荷和磁通(电流)的量子涨落.发现这种涨落不仅与电路的元件参量和共振频率有关,而且随着温度的升高,介观电路的量子涨落增大.噪声将影响信号的稳定性和精确度,由于电路一般不是超导体,电路中的电流将产生焦耳热,实际的电路不可能在很低的温度下工作.因此在介观电路中考虑热真空涨落的影响是非常重要的.另外,本文的结论具有普遍性,文献中曾研究的真空态下介观 *LC* 电路和 *RLC* 电路的量子涨落被包含在本文的结论之中.

[1] Garcia R G 1992 *Appl. Phys. Lett.* **60** 1960

[2] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York :John Wiley)

[3] Buot F A 1993 *Phys. Rep.* **234** 73

[4] Chen B, Li Y Q, Fang H *et al* 1995 *Phys. Lett.* A **205** 121

[5] Li Y Q. and Chen B 1996 *Phys. Rev.* B **53** 4027

[6] Chen B, Fang H, Jiao Z K *et al* 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 1170 (in Chinese) [陈 斌、方 挥、焦正宽等 1996 科学通报 **41** 1170]

[7] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 965 (in Chinese) [顾永建 2000 物理学报 **49** 965]

[8] Wang X G and Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171

[9] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490

[10] Fan H Y and Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174

[11] Umezawa H and Yamanaka Y 1988 *Adv. Phys.* **37** 531

[12] Dong C H 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 467 (in Chinese) [董传华 1997 物理学报 **46** 467]

Quantum flunctuations in thermal vacuum state for mesoscopic *RLC* electric circuit

Wang Zhong-Qing

(*College of Optical and Electronic Engineering, University of Posts and Telecommunications of Chongqing, Chongqing* 400065, *China*)

(Received 31 July 2001; revised manuscript received 23 December 2001)

Abstract

By making use of the thermo-field dynamics (TFD), the quantum fluctuations of charge and magnetic flux of a mesoscopic circuit including resistor, inductor and capacitor (*RLC*) for vacuum state with thermal noise have been studied. Thus the dependence of the fluctuations on temperature in the thermal vacuum state at finite temperature can be seen. It is shown that the quantum fluctuations depend on not only the circuit component parameters and resonant frequency ω, but also the temperature T. The higher the temperature, the more quantum noise the *RLC* circuit exhibits.

Keywords: mesoscopic *RLC* circuit, thermal vacuum state, quantum fluctuation

PACC: 7335, 0365