

转动相对论 Birkhoff 约束系统积分不变量的构造^{*}

罗绍凯 卢一兵 周 强 王应德 欧阳实

(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

(2001 年 12 月 9 日收到 2001 年 12 月 30 日收到修改稿)

研究转动相对论 Birkhoff 约束系统积分不变量的构造. 首先,建立转动相对论系统的约束 Birkhoff 方程;其次,利用等时变分与非等时变分之间的关系建立系统的非等时变分方程;然后,研究转动相对论 Birkhoff 约束系统的第一积分与积分不变量之间的关系,证明由系统的一个第一积分可以构造一个积分不变量,并给出自由 Birkhoff 系统的相应结果;最后,讨论转动相对论 Hamilton 系统、相对论 Birkhoff 系统和 Hamilton 系统、经典转动系统和等时变分情形下的积分不变量的构造,结果表明相关的结论均为该定理的特款. 给出一个例子说明结果的应用.

关键词:转动相对论, Birkhoff 系统, 约束, 第一积分, 积分不变量

PACC: 0316, 0320, 0230

1. 引 言

积分不变量在经典力学,尤其在近代物理学中具有非常重要的作用.在天体力学、流体动力学等学科中也有重要地位.随着人们认识的发展,积分不变量受到数学、力学、物理学界的广泛重视,Arnold 甚至认为^[1]积分不变量不仅是 Hamilton 流的基础,并且可以作为整个力学的基础.

1904 年,Whittaker 指出^[2]:对于完整力学系统,已知一个第一积分可以确定一个积分不变量. Mei 证明这一结论对非完整系统也成立^[3]. 此后,这一问题的研究相继被拓展到非等时变分情形^[4]、Vacco 动力学系统^[5]、非惯性系统^[6]、变质量系统^[7]和广义力学系统^[8]. 最近,文献[9—11]又把这一结论拓展到广义非完整力学系统和 Birkhoff 系统,形成了构造复杂力学系统积分不变量的通用方法. 但是,以往的工作限于经典力学系统.

最近,文献[12]构造了转动相对论 Hamilton 系统的积分不变量. Birkhoff 动力学比 Hamilton 动力学更为一般^[13,14], Hamilton 动力学在近代物理学领域已得到广泛应用, Birkhoff 动力学也理应在近代物理学领域扮演重要角色. 文献[15—20]研究了转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论、对称性理论、

积分的场方法、代数结构以及几何理论,但限于自由 Birkhoff 系统. 本文研究转动相对论 Birkhoff 约束系统积分不变量的构造,建立转动相对论 Birkhoff 约束系统动力学方程及其非等时变分方程,证明由一个第一积分可以构造系统的一个积分不变量,分别讨论转动相对论 Hamilton 系统、相对论 Birkhoff 系统和相对论 Hamilton 系统、经典转动 Birkhoff 系统以及等时变分下的积分不变量的构造,并举例说明结果的应用.

2. 转动相对论 Birkhoff 约束系统动力学的非等时变分方程

研究 N 个粒子构成的力学系统绕定轴的转动,在 t 时刻第 i 个粒子的角速度为 $\dot{\theta}_i$, i 粒子的极限角速度为 Γ_i , 经典转动惯量为 I_{oi} , 其相对论性转动惯量为^[21,22]

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2 / \Gamma_i^2}} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1)$$

构造转动相对论系统的 Birkhoff 函数 B^* 和 Birkhoff 函数组 R_ν^* ($\nu = 1, \dots, 2n$), 即

$$B^* = B^*(I_i(t, a^\mu), t, a^\mu),$$

$$R_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t, a^\mu), t, a^\mu)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:19972010)及河南省自然科学基金(批准号:984053100 和 998040080)资助的课题.

$$(\mu, \nu = 1 \dots 2n; i = 1 \dots, N). \quad (2)$$

令

$$\tilde{B}^* = \tilde{B}^*(t, a^\mu) = B^*(I_i(t, a^\mu), t, a^\mu),$$

$$\tilde{R}_\nu^* = \tilde{R}_\nu^*(t, a^\mu) = R_\nu^*(I_i(t, a^\mu), t, a^\mu)$$

$$(\mu, \nu = 1 \dots 2n; i = 1 \dots, N), \quad (3)$$

那么, 转动相对论系统的 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理为^[15]

$$\left\{ \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} \right\} \delta a^\mu = 0$$

$$(\nu, \mu = 1 \dots 2n). \quad (4)$$

如果系统受有约束

$$f_\beta(t, a^\mu) = 0 \quad (\beta = 1 \dots, g), \quad (5)$$

对(5)式取等时变分, 得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \delta a^\mu = 0. \quad (6)$$

利用原理(4)式和通常的 Lagrange 乘子法则, 得到转动相对论 Birkhoff 约束系统动力学方程

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^* \dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = P_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots 2n),$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^* = \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu} \right), P_\mu = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} = P_\mu(t, a^\mu). \quad (7)$$

沿用文献[13]的思想, 在运动微分方程积分之前, 可求出 λ_β 作为 t, a^μ 的函数, 有形式

$$\lambda_\beta = -\frac{\Delta_{\gamma\beta}}{\Delta} \left[\frac{\partial f_\gamma}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} \right] \\ (\beta, \gamma = 1 \dots, g), \quad (8)$$

其中

$$\Delta = \det \left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \right) \neq 0, \quad (9)$$

$\Delta_{\gamma\beta}$ 为行列式 Δ 元素 (γ, β) 的代数余子式. 把方程(7)视为与转动相对论 Birkhoff 约束系统相应的自由 Birkhoff 系统的运动微分方程, 如果运动初始条件满足约束方程(5), 那么方程(7)的解就给出转动相对论 Birkhoff 约束系统的运动.

引入时间的任意可微无限小函数 Δt , 它产生出的变轨与正轨之间的非等时变分定义为

$$\Delta a^\mu = \bar{a}^\mu(t + \Delta t) - a^\mu(t) \quad (\mu = 1 \dots 2n), \quad (10)$$

由于 Δt 足够小, 展开 $\bar{a}^\mu(t + \Delta t)$ 并保留一次项, 有

$$\Delta a^\mu = \delta a^\mu + \dot{a}^\mu \Delta t. \quad (11)$$

在方程(7)中, 用 $a^\mu + \Delta a^\mu, t + \Delta t$ 分别替代 a^μ, t , 展开后并忽略 $\Delta a^\mu, \Delta t$ 的二阶以上小量, 得

$$\frac{d}{dt} \Delta a^\mu = \tilde{\omega}^{*\mu\nu} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^\nu \partial a^\rho} + \frac{\partial^2 \tilde{R}_\nu^*}{\partial t \partial a^\rho} + \frac{\partial P_\nu}{\partial a^\rho} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{\nu\sigma}^*}{\partial a^\rho} \right. \right. \\ \times \tilde{\omega}^{*\sigma\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\sigma} + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} + P_\sigma \right) \Big] \Delta a^\rho + \left[\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^\nu \partial t} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \tilde{R}_\nu^*}{\partial t^2} + \frac{\partial P_\nu}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{\nu\sigma}^*}{\partial t} \tilde{\omega}^{*\sigma\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\sigma} + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} \right. \right. \\ \left. \left. + P_\sigma \right) \right] \Delta t + \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\nu} + \frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial t} + P_\nu \right) \frac{d}{dt} (\Delta t) \Big\}, \quad (12)$$

其中 $\tilde{\omega}^{*\mu\nu} \tilde{\omega}_{\nu\rho}^* = \delta_{\mu\rho}$. 称方程(12)为转动相对论 Birkhoff 约束系统(7)的非等时变分方程.

3. 转动相对论 Birkhoff 系统积分不变量的构造

如果转动相对论 Birkhoff 约束系统(7)有一个第一积分, 形如

$$\Phi(t, a^\mu) = \text{const}. \quad (13)$$

可以证明, 对于时间的任意可微无限小函数 Δt , Δa^μ 表达式

$$S = \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a^\mu} \Delta a^\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t \right) \quad (14)$$

是系统的一个积分不变量.

实际上, 利用运动微分方程(7)和非等时变分方程(12), 有

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a^\mu} \Delta a^\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t \right) \\ = \int \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^\mu \partial a^\rho} \dot{a}^\rho + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^\mu \partial t} \right) \Delta a^\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial a^\mu} \frac{d}{dt} \Delta a^\mu \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial a^\rho} \dot{a}^\rho + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{d}{dt} (\Delta t) \right] \\ = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial a^\mu} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\sigma} + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} + P_\sigma \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \Delta a^\mu + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\sigma} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} + P_\sigma \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \Delta t + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}_\sigma^*}{\partial a^\sigma} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} + P_\sigma \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \frac{d}{dt} (\Delta t) \Big\}. \quad (15)$$

因为 Φ 是系统(7)的一个第一积分, 因此有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a^\rho} \tilde{\omega}^{*\rho\mu} \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\sigma} + \frac{\partial \tilde{R}_\sigma^*}{\partial t} + P_\sigma \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

把(16)式代入(15)式, 可得 $dS/dt = 0$. 于是有如下

定理 .

定理 1 如果转动相对论 Birkhoff 约束系统 (7) 有形如 (13) 式的一个第一积分 ,则表达式 (14) 是该系统的一个积分不变量 .

容易证明 ,定理 1 的逆定理也成立 ,即有

定理 2 如果转动相对论 Birkhoff 约束系统 (7) 有形如 (14) 式的一个积分不变量 ,那么该系统一定有一个第一积分 (13) 式 .

对于转动相对论自由 Birkhoff 系统 , $P_\mu = \alpha (\mu = 1, \dots, 2n)$,方程 (7) 成为

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^* \dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 2n), \quad (17)$$

方程 (12) 也退化为转动相对论自由 Birkhoff 系统的非等时变分方程 ,类同定理 1 的证明 ,得到

定理 3 如果转动相对论自由 Birkhoff 系统 (17) 有形如 (13) 式的一个第一积分 ,则表达式 (14) 是该系统的一个积分不变量 .

容易证明 ,定理 3 的逆定理也成立 ,即有

定理 4 如果转动相对论自由 Birkhoff 系统 (17) 有形如 (14) 式的一个积分不变量 ,那么该系统一定有一个第一积分 (13) 式 .

4. 推 论

4.1. 转动相对论 Hamilton 系统积分不变量的构造

如果 $\tilde{R}_\mu^*$ 不显含时间 t ,令

$$a^\mu = \begin{cases} q^\mu & (\mu = 1, \dots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, \dots, 2n), \end{cases} \quad \tilde{R}_\mu^* = \begin{cases} p_\mu & (\mu = 1, \dots, n) \\ 0 & (\mu = n+1, \dots, 2n), \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{B}^* = H_r,$$

则有

$$(\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & +1_{n \times n} \\ -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

那么方程 (7) 化为约束 Hamilton 正则形式^[12]

$$\dot{q}^s = \frac{\partial H_r}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H_r}{\partial q^s} + \tilde{Q}'_s + \tilde{\Lambda}_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (20)$$

$$H_r = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}^s - L_r^*, \quad p_s = \frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}^s}, \quad L_r^* = T_r^* - V, \quad (21)$$

$$T_r^* = \sum_{i=1}^N I_{oi} \Gamma_i^2 (1 - \sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2 / \Gamma_i^2}), \quad (22)$$

$\tilde{Q}'_s, \tilde{\Lambda}_s$ 分别为非势广义力和广义约束反力在正则空间中的表示 . 非等时变分方程 (12) 随之化为转动相对论约束 Hamilton 系统的非等时变分方程 ,即文献 [12] 中的 (42) 式和 (43) 式 . 因此 ,定理 1 和 2 给出转动相对论约束 Hamilton 系统的第一积分与积分不变量之间的关系 ,即为文献 [12] 中的相应结论 .

对于 $\tilde{\Lambda}_s = 0$ 的转动相对论自由 Hamilton 系统 ,在 (18) — (22) 式的条件下 ,定理 3 和 4 给出系统的第一积分与积分不变量之间的关系 .

4.2. 相对论 Birkhoff 系统积分不变量的构造

文献 [23, 24] 研究了相对论 Birkhoff 系统动力学 ,但尚未给出积分不变量的构造 . 用

$$m_i = \frac{m_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_i^2 / c^2}} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (23)$$

$$B^* = B^*(m_i(t, a^\mu), t, a^\mu), \quad R_\nu^* = R_\nu^*(m_i(t, a^\mu), t, a^\mu) \quad (\nu, \mu = 1, \dots, 2n), \quad (24)$$

分别替代 (1) 式和 (2) 式 ,则本文可以转化给出相对论 Birkhoff 系统动力学的第一积分与积分不变量之间的关系 . 进而 ,在 $\dot{\mathbf{r}}_i \ll c$ 的经典近似下 ,得到经典 Birkhoff 系统的相应结论 ,即文献 [10, 11] 的结果 .

用 (23) (24) 式替代 (1) (2) 式 ,用相对论性广义动能^[25]

$$T^* = \sum_{i=1}^N m_{oi} c^2 (1 - \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_i^2 / c^2}) \quad (25)$$

替代转动相对论系统广义动能 (22) 式 ,类同于第 4.1 节的讨论 ,本文给出相对论 Hamilton 系统第一积分与积分不变量之间的关系 . 进而 ,在 $\dot{\mathbf{r}}_i \ll c$ 的经典近似下 ,取 $\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_i^2 / c^2}$ 幂级数展开式的前两项 ,使得

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_{oi} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = T, \quad (26)$$

得到经典 Hamilton 系统在文献 [4] 中的结论 ;在 $\Delta t = 0$ 的等时变分下 ,得到文献 [3] 中的结论 ;对于完整力学系统 ,得到文献 [2] 的原始结论 .

4.3. 经典转动 Birkhoff 系统积分不变量的构造

在 $\dot{\theta}_i \ll \Gamma_i$ 的经典近似下

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \approx I_{oi} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (27)$$

$$\tilde{B}^*(t, a^\mu) = B(t, a^\mu), \tilde{R}_\nu^*(t, a^\mu) = R_\nu(t, a^\mu) \quad (\nu, \mu = 1, \dots, 2n), \quad (28)$$

取 $\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$ 关于 $\dot{\theta}_i/\Gamma_i$ 幂级数展开式的前两项, 则

$$T_r^* \approx \sum_{i=1}^N I_{oi} \Gamma_i^2 - \sum_{i=1}^N I_{oi} \Gamma_i^2 \left(1 - \frac{\dot{\theta}_i^2}{2\Gamma_i^2}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_{oi} \dot{\theta}_i^2 = T_r, \quad (29)$$

则本文定理退化给出经典转动 Birkhoff 系统的第一积分与积分不变量的关系, 第 4.1 节退化给出经典转动 Hamilton 系统的第一积分与积分不变量之间的关系.

4.4. 等时变分下动力学系统积分不变量的构造

在 $\Delta t = 0$ 的等时变分下 (11) 式给出 $\Delta a^\mu = \delta a^\mu$, 则本文定理和第 4.1—4.3 节的推论全部转化为等时变分下动力学系统第一积分与积分不变量之间的关系.

本文的定理对于转动相对论系统、相对论系统或经典力学系统, 对于 Birkhoff 系统或 Hamilton 系统, 对于非完整系统、完整系统或自由系统, 对于非

等时变分或等时变分情形, 具有通用性.

5. 例

已知转动相对论 Birkhoff 系统^[15]

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{I}{M_o} \Gamma^2 - a^1, R_1^* = 0, \\ R_2^* &= \frac{I}{M_o} \left(\frac{I}{M_o} \Gamma^2 - a^1 \right) \left(1 - \frac{(a^2)^2}{\Gamma^2} \right)^{-1}, \\ I &= \frac{I_o}{\sqrt{1 - (a^2)^2/\Gamma^2}} \end{aligned} \quad (30)$$

有两个彼此独立的第一积分

$$\Phi_1 = \frac{I_o}{M_o} \left(1 - \frac{(a^2)^2}{\Gamma^2} \right)^{-1/2} - a^1, \quad (31)$$

$$\Phi_2 = \frac{I_o}{M_o} \Gamma \operatorname{tg}(\arcsin \frac{a^2}{\Gamma}) - t, \quad (32)$$

由定理 3 可知系统 (30) 存在如下的积分不变量

$$S_1 = \int \left[-\Delta a^1 + \frac{a^2}{M_o \Gamma^2} \left(1 - \frac{(a^2)^2}{\Gamma^2} \right)^{-1} \Delta a^2 \right] = \text{const.} \quad (33)$$

$$S_2 = \int \left[\frac{I}{M_o} \sec^2(\arcsin \frac{a^2}{\Gamma}) \Delta a^2 - \Delta t \right] = \text{const.} \quad (34)$$

反之, 若已知转动相对论 Birkhoff 系统 (30) 有形如 (33) (34) 式的两个积分不变量, 那么由定理 4 可知该系统一定有两个积分 (31) 式和 (32) 式.

- [1] Arnold V I 1979 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag)
- [2] Whittaker E T 1904 *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Mei F X 1991 *Chin. Sci. Bull.* **36** 2038
- [4] Zhang J F 1992 *Chin. Sci. Bull.* **37** 661 (in Chinese) [张解放 1992 科学通报 **37** 661]
- [5] Luo S K 1993 *J. Xinjiang Univ.* **10** 54 (in Chinese) [罗绍凯 1993 新疆大学学报 **10** 54]
- [6] Luo S K 1993 *Appl. Math. Mech.* **14** 307
- [7] Luo S K 1994 *Appl. Math. Mech.* **15** 147
- [8] Luo S K 1995 *Huanghuai Journal* **11**(2) 25 (in Chinese) [罗绍凯 1995 黄淮学刊 **11**(2) 25]
- [9] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [10] Mei F X and Wu H B 2000 *Chin. Sci. Bull.* **43** 412
- [11] Zhang Yi 2001 *Acta Mech. Sin.* **33** 669 (in Chinese) [张毅 2001 力学学报 **33** 669]

- [12] Luo S K, Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [13] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]
- [14] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]
- [15] Luo S K, Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [16] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **99** 449
- [17] Luo S K, Chen X W and Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
- [18] Luo S K, Chen X W and Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [19] Luo S K, Guo Y X, Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]
- [20] Luo S K, Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

- [21] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **15** 89
- [22] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [23] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023(in Chinese)
[傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1032]
- [24] Fu J L ,Chen L Q ,Luo S K ,Chen X W and Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289(in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]
- [25] Luo S K 1990 *Proc. ICDVIX* Beijing :Beijing University Press ,p645

The construction of a class of integral invariants for rotational relativistic Birkhoffian system with constraints ^{*}

Luo Shao-Kai Lu Yi-bing Zhou Qiang Wang Ying-De Ouyang Shi

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics ,Changsha University ,Changsha 410003 , China*)

(Received 9 December 2001 ; revised manuscript received 30 December 2001)

Abstract

The construction of a class of integral invariants for rotational relativistic Birkhoffian system with constraints are studied. Firstly ,the Birkhoff 's equations with constraints of rotational relativistic system are given. Secodly ,the equations of nonsimultaneous variation of the rotational relativistic Birkhoffian system with constraints are established by using the relation between the simultaneous variation and the nonsimultaneous variation. Thirdly ,the relation between the first integral and the integral invariants of the system is studied and it is proved that , using a first integral , we can construct an integral invariant of the system. And the relevant conclusions corresponding to the rotational relativistic free Birkhoffian system are given. Finally ,the construction of integral invariants for the rotational relativistic Hamiltonian system ,the relativistic Birkhoffian system and the relativistic Hamiltonian system ,the classical rotation system and the cases of simultaneous variation are discussed. The results show that the relevant conclusions are the deductions of the theorems of this paper. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords : rotational relativity , Birkhoffian system , constraint , first integral , integral invariant

PACC : 0316 , 0320 , 0230

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 19972010) and by the Natural Science Foundation of Henan Province , China (Grant Nos. 984053100 and 998040080).