第 51 卷 第 3 期 2002 年 3 月
1000-3290/2002/51(03)/0468-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.3, March, 2002

环形非球谐振子径向矩阵元的通项公式及其递推关系*

陈昌远　孙东升　刘友文
(盐城师范学院物理系,盐城　224002)
成天龙
(盐城工业学校物理组,盐城　224002)
(2001 年 7 月 24 日收到;2001 年 8 月 30 日收到修改稿)

环形非球谐振子的势能函数为 $V(r,\theta)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{A}{r^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{b}{r^2\sin^2\theta}$,其精确的能谱方程和归一化的波函数已经获得.在此基础上,给出了环形非球谐振子径向矩阵元的通项公式和不同幂次径向矩阵元之间所满足的递推关系.作为特例,讨论了球谐振子、非球谐振子和环形振子的有关结果.

关键词:环形非球谐振子,径向矩阵元,通项公式,递推关系
PACC:0365,0230

1 引　言

众所周知,球谐振子是量子力学中可精确求解的问题之一[1,2].它在原子核的壳层结构模型中得到了广泛的应用[3],在原子核结构的研究中占有重要地位.最近人们获得了它的径向矩阵元的通项公式和不同幂次矩阵元之间所满足的递推关系[4,5],解决了矩阵元的计算问题.然而实际问题往往是偏离谐振模型的,因此研究一些非谐振模型如非球谐振子[6]和环形振子[7—11]等不仅具有实际意义,而且也具有重要的理论意义,这是因为量子力学中能够精确求解的问题为数不多.最近,文献[12]提出了一个新的精确可解的非谐振模型,其势函数为

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{A}{r^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{b}{r^2\sin^2\theta},\qquad(1)$$

式中 A 和 b 均为常数.式中不仅含有平方反比势,而且还含有环形势部分,所以称为环形非球谐振子,如此复杂的势函数还能精确求解,除了文献[12]有报道外,还未见其他有关报道.文献[12]求得了环形非球谐振子势的 Schrödinger 方程的精确解,给出了精确的能谱方程和归一化角向波函数与径向波函数.由于波函数是归一化的,这就使得其他一些物理量的解析计算成为可能.这种情况在其他精确可解的体系中也同样存在[13—15],所以作为文献[12]给出的归一化波函数具体应用的一个实际例子.本文计算了环形非球谐振子的径向矩阵元,给出了径向矩阵元的通项公式,推导出了不同幂次径向矩阵元之间所满足的递推关系,解决了矩阵元的计算问题.这是因为当把环形非球谐振子应用于实际问题时,径向矩阵元是首先需要计算的,所以本文专门对此进行了讨论.本文结果具有普遍性,文献[4—6,10,11]中的有关结果均作为特例包含在本文的一般结论之中.

2 矩阵元与平均值的通项公式

在球坐标系中,取自然单位($\hbar=m=\omega=1$),环形非球谐振子的 Schrödinger 方程为

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{2}r^2+\frac{A}{2r^2}+\frac{b}{2r^2\sin^2\theta}\right]\Psi(r,\theta,\varphi)=E\Psi(r,\theta,\varphi).\qquad(2)$$

在球坐标系中变离变量,得径向方程为[12]

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left[2E-r^2-\frac{L(L+1)}{r^2}\right]u(r)=0,\qquad(3)$$

* 江苏省教育厅自然科学基金(批准号:00KJD140007)及盐城师范学院专项基金资助的课题.

式中

$$L=\frac{1}{2}\Big[\sqrt{1+4\big[A+(\sqrt{b+m^2}+s)(\sqrt{b+m^2}+s+1)\big]}-1\Big]\qquad(|m|,s=0,1,2,\cdots).\tag{4}$$

求解方程(3),得环形非球谐振子的能谱方程和归一化径向波函数分别为

$$E=2n_r+L+\frac{3}{2}=2n_r+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4\big[A+(\sqrt{b+m^2}+s)(\sqrt{b+m^2}+s+1)\big]}+1\quad(n_r,|m|,s=0,1,2,3,\cdots),\tag{5}$$

$$u_{n_rL}(r)=N_{n_rL}r^{L+1}e^{-r^2/2}F(-n_r,L+3/2,r^2),\tag{6}$$

式中 $F(\alpha,\gamma,x)$ 为合流超几何函数,归一化常数

$$N_{n_rL}=\sqrt{\frac{2\Gamma(n_r+L+3/2)}{n_r![\Gamma(L+3/2)]^2}}.\tag{7}$$

由此可知,环形非球谐振子的能谱和径向波函数实际上由三个量子数 n_r,$|m|$,和 s 共同决定,但由于 $|m|$ 和 s 共同确定了 L,所以径向状态将由 n_r 和 L 这两个量子数决定.

环形非球谐振子的径向矩阵元定义为

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n'_rL'\rangle&=\int_0^\infty r^s u_{n_rL}(r)u_{n'_rL'}(r)\mathrm{d}r\\&=N_{n_rL}N_{n'_rL'}\int_0^\infty r^{L+L'+s+2}e^{-r^2}\\&\quad\cdot F(-n_r,L+3/2,r^2)\\&\quad\cdot F(-n'_r,L'+3/2,r^2)\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{8}$$

利用合流超几何函数和广义拉盖尔多项式的关系[16]

$$F(-n,\mu+1,z)=\frac{n!\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}L_n^{\mu}(z),\tag{9}$$

(8)式可重新表示为

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n'_rL'\rangle&=\frac{N_{n_rL}N_{n'_rL'}}{2}\\&\quad\cdot\frac{n!\Gamma(L+3/2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)}\frac{n'_r!\Gamma(L'+3/2)}{\Gamma(n'_r+L'+3/2)}\\&\quad\cdot\int_0^\infty(r^2)^{(L+L'+s+1)/2}e^{-r^2}L_{n_r}^{L+1/2}(r^2)\\&\quad\cdot L_{n'_r}^{L'+1/2}(r^2)\mathrm{d}r^2.\end{aligned}\tag{10}$$

利用含有广义拉盖尔多项式的积分公式[16]

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty z^\lambda e^{-z}L_n^{\mu}(z)L_{n'}^{\mu'}(z)\mathrm{d}z\\&=(-1)^{n+n'}\Gamma(\lambda+1)\sum_k\binom{\lambda-\mu}{n-k}\binom{\lambda-\mu'}{n'-k}\\&\quad\cdot\binom{\lambda+k}{k},\qquad[\mathrm{Re}(\lambda)>-1],\end{aligned}\tag{11}$$

即得环形非球谐振子的径向矩阵元的通项表达式为

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n'_rL'\rangle&=\frac{(-1)^{n_r+n'_r}N_{n_rL}N_{n'_rL'}}{2}\\&\quad\cdot\frac{n_r!\Gamma(L+3/2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)}\frac{n'_r!\Gamma(L'+3/2)}{\Gamma(n'_r+L'+3/2)}\\&\quad\cdot\Gamma\Big(\frac{L+L'+s+3}{2}\Big)\sum_k\binom{(L'+s-L)/2}{n_r-k}\\&\quad\cdot\binom{(L+s-L')/2}{n'_r-k}\binom{(L+L'+s+2k+1)/2}{k},\end{aligned}\tag{12}$$

式中 L 由(4)式确定,而

$$L'=\frac{1}{2}\Big[\sqrt{1+4\big[A+(\sqrt{b+(m')^2}+s')(\sqrt{b+(m')^2}+s'+1)\big]}-1\Big]\qquad(|m'|,s'=0,1,2,\cdots).\tag{13}$$

由于 $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$,所以(12)式的使用条件为 $s>-(L+L'+3)$.

令 $n'_r=n_r$,$m'=m$,$s'=s$,则 $L'=L$,于是(12)式退化为环形非球谐振子平均值的通项公式

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle&=\frac{(N_{n_rL})^2}{2}\\&\quad\cdot\Big[\frac{n_r!\Gamma(L+3/2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)}\Big]^2\Gamma\Big(\frac{2L+s+3}{2}\Big)\\&\quad\cdot\sum_k\binom{s/2}{n_r-k}^2\binom{(2L+s+2k+1)/2}{k}.\end{aligned}\tag{14}$$

进一步在上式中令 $s=0$,注意这时等号右边的求和仅 $n_r=k$ 有这一项,同时把归一化常数代入上式化简,最终得 $\langle n_rL|n_rL\rangle=1$.这一结果是显然的,它充分说明文献[12]给出的环形非球谐振子的归一化径向波函数以及本文获得的环形非球谐振子的径向矩阵元的通项表达式(12)完全正确.

3　矩阵元与平均值的递推关系

上节给出了环形非球谐振子的径向矩阵元和平均值的计算公式,式中含有阶乘运算和伽马函数.所以对于高幂次而言,不仅计算过程极为繁琐,而且计算精度也不高.因此,实际计算时可利用(12)和(14)式算出少数几个低幂次的径向矩阵元和径向平均值的值来,而高幂次的矩阵元和平均值可利用本节推导出的递推公式来进行计算.这样不仅可以减少计

算工作量,更有利于理论分析和研究.

仿照文献[5,17]的做法,对于状态 n_rL 和 n'_rL',把(5)式代入(3)式,则(3)式分别成为

$$\frac{d^2u_{n_rL}(r)}{dr^2}+\Big[(4n_r+2L+3)-r^2-\frac{L(L+1)}{r^2}\Big]u_{n_rL}(r)=0, \tag{15}$$

$$\frac{d^2u_{n'_rL'}(r)}{dr^2}+\Big[(4n'_r+2L'+3)-r^2-\frac{L'(L'+1)}{r^2}\Big]u_{n'_rL'}(r)=0. \tag{16}$$

由(6)式可知

$$r\to 0,\quad u_{n_rL}(r)\to r^{L+1};$$
$$r\to\infty,\quad u_{n_rL}(r)\to e^{-r^2/2}, \tag{17}$$

所以若 s 取值满足

$$s>-(L+L'+1), \tag{18}$$

则做定积分时有下列结果:

$$\begin{aligned}
&r^su_{n'_rL'}(r)\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\Big|_0^\infty=0,\\
&r^{s-1}u_{n'_rL'}(r)u_{n_rL}(r)\Big|_0^\infty=0,\\
&r^s\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}u_{n_rL}(r)\Big|_0^\infty=0,\\
&r^{s+1}\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\Big|_0^\infty=0.
\end{aligned} \tag{19}$$

以 $r^su_{n'_rL'}(r)$ 乘(15)式各项,并积分 $\int_0^\infty\cdots dr$,方括号内的三项显然给出 r^s,r^{s+2} 和 r^{s-2} 的矩阵元,而第一项进行二次分部积分,并注意利用(19)式,得

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty r^s\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr+\int_0^\infty sr^{s-1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&=[L(L+1)-s(s-1)]\langle n_rL\mid r^{s-2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-(4n_r+2L+3)\langle n_rL\mid r^s\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad+\langle n_rL\mid r^{s+2}\mid n'_rL'\rangle,
\end{aligned} \tag{20}$$

再以 $r^su_{n_rL}(r)$ 乘(16)式各项,并积分,方括号内的三项依然给出 r^s,r^{s+2} 和 r^{s-2} 的矩阵元,而第一项进行一次分部积分,并注意利用(19)式,得

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty r^s\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr-\int_0^\infty sr^{s-1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&=L'(L'+1)\langle n_rL\mid r^{s-2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-(4n'_r+2L'+3)\langle n_rL\mid r^s\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad+\langle n_rL\mid r^{s+2}\mid n'_rL'\rangle.
\end{aligned} \tag{21}$$

联合(20)和(21)式,得

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty r^s\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr=\frac{1}{2}[L(L+1)\\
&\quad+L'(L'+1)-s(s-1)]\langle n_rL\mid r^{s-2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-(2n_r+2n'_r+L+L'+3)\langle n_rL\mid r^s\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad+\langle n_rL\mid r^{s+2}\mid n'_rL'\rangle,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty sr^{s-1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr=\frac{1}{2}[L(L+1)\\
&\quad-L'(L'+1)-s(s-1)]\langle n_rL\mid r^{s-2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-(2n_r-2n'_r+L-L')\langle n_rL\mid r^s\mid n'_rL'\rangle.
\end{aligned} \tag{23}$$

下面用 $r^{s+1}\frac{du_{n'_rL'}}{dr}$ 乘(15)式各项,然后对第一项进行一次分部积分,并注意利用(19)式,得

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty(s+1)r^s\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&-\int_0^\infty r^{s+1}\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{d^2u_{n'_rL'}(r)}{dr^2}dr\\
&=L(L+1)\int_0^\infty r^{s-1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&\quad-(4n_r+2L+3)\int_0^\infty r^{s+1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&\quad+\int_0^\infty r^{s+3}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr,
\end{aligned} \tag{24}$$

再用 $r^{s+1}\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}$ 乘(16)式各项,然后对方括号内的三项各进行一次分部积分,并注意利用(19)式,得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty r^{s+1}\frac{du_{n_rL}(r)}{dr}\frac{d^2u_{n'_rL'}(r)}{dr^2}dr\\
&=-L'(L'+1)(s-1)\langle n_rL\mid r^{s-2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-L'(L'+1)\int_0^\infty r^{s-1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&\quad+(4n'_r+2L'+3)(s+1)\langle n_rL\mid r^s\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad+(4n'_r+2L'+3)\int_0^\infty r^{s+1}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr\\
&\quad-(s+3)\langle n_rL\mid r^{s+2}\mid n'_rL'\rangle\\
&\quad-\int_0^\infty r^{s+3}u_{n_rL}(r)\frac{du_{n'_rL'}(r)}{dr}dr.
\end{aligned} \tag{25}$$

把(25)式代入(24)式,并化简合并同幂次项的积分,得

$$
-\int_0^\infty (s+1) r^s \frac{\mathrm{d}u_{n_r L}(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}u_{n'_r L'}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r
$$

$$
= -L'(L'+1)(s-1)\langle n_r L \mid r^{s-2} \mid n'_r L'\rangle + [L(L+1)-L'(L'+1)]\int_0^\infty r^{s-1} u_{n_r L}(r)\frac{\mathrm{d}u_{n'_r L'}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r
$$

$$
+(4n'_r+2L'+3)(s+1)\langle n_r L \mid r^s \mid n'_r L'\rangle - 2(2n_r-2n'_r+L-L')\int_0^\infty r^{s+1} u_{n_r L}(r)\frac{\mathrm{d}u_{n'_r L'}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r
$$

$$
-(s+3)\langle n_r L \mid r^{s+2} \mid n'_r L'\rangle, \tag{26}
$$

式中等号右边第二项的积分可直接利用(23)式来代换,第四项的积分则需在(23)式中将 $s\to s+2$,然后代换这一项的积分,二项的积分代换后,再对(26)式进行化简,最后可得

$$
-\int_0^\infty r^s \frac{\mathrm{d}u_{n_r L}(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}u_{n'_r L'}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r
$$

$$
=\left\{\frac{[L(L+1)-L'(L'+1)]^2}{2s(s+1)} - \frac{[L(L+1)+L'(L'+1)](s-1)}{2(s+1)}\right\}\langle n_r L \mid r^{s-2} \mid n'_r L'\rangle
$$

$$
+\left\{(2n_r+2n'_r+L+L'+3) - \frac{2[L(L+1)-L'(L'+1)](2n'_r-2n'_r+L-L')}{s(s+2)}\right\}\langle n_r L \mid r^s \mid n'_r L'\rangle
$$

$$
+\left\{\frac{2(2n_r-2n'_r+L-L')^2}{(s+1)(s+2)} - \frac{s+3}{s+1}\right\}\langle n_r L \mid r^{s+2} \mid n'_r L'\rangle. \tag{27}
$$

对比(22)与(27)式,即得环形非球谐振子的径向矩阵元的递推公式为

$$
\left\{\frac{(2n_r-2n'_r+L-L')^2}{(s+1)(s+2)} - \frac{s+2}{s+1}\right\}\langle n_r L \mid r^{s+2} \mid n'_r L'\rangle
$$

$$
=\left\{\frac{[L(L+1)-L'(L'+1)](2n_r-2n'_r+L-L')}{s(s+2)} - (2n_r+2n'_r+L+L'+3)\right\}\langle n_r L \mid r^s \mid n'_r L'\rangle
$$

$$
+\left\{\frac{s[L(L+1)+L'(L'+1)]}{2(s+1)} - \frac{s(s-1)}{4} - \frac{[L(L+1)-L'(L'+1)]^2}{4s(s+1)}\right\}\langle n_r L \mid r^{s-2} \mid n'_r L'\rangle. \tag{28}
$$

由(28)式可知,只要知道了环形非球谐振子的径向矩阵元$\langle n_r L|r|n'_r L'\rangle$,$\langle n_r L|r^2|n'_r L'\rangle$和$\langle n_r L|r^3|n'_r L'\rangle$的值,就可利用(28)式算出环形非球谐振子的任意幂次的径向矩阵元.(28)式的使用条件就是(18)式,即 $s>-(L+L'+1)$.在(28)式中,如果令 $n'_r=n_r$,$L'=L$,即得环形非球谐振子的径向平均值的递推公式

$$
(s+2)\langle n_r L \mid r^{s+2} \mid n_r L\rangle = (s+1)(4n_r+2L+3)\langle n_r L \mid r^s \mid n_r L\rangle - \frac{s[(2L+1)^2-s^2]}{4}\langle n_r L \mid r^{s-2} \mid n_r L\rangle. \tag{29}
$$

4 讨 论

由(1)式可知,当实参数 A 和 b 同时等于零时,环形非球谐振子势就退化为球谐振子势,这时

$$
L=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4(|m|+s)(|m|+s+1)}-1\right]
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4l(l+1)}-1\right]=l, \tag{30}
$$

而 l 就是通常意义下的角量子数,于是(12)和(28)

式就分别退化为球谐振子的径向矩阵元的通项公式和不同幂次径向矩阵元之间所满足的递推关系

$$\langle n_r l \mid r^s \mid n'_r l' \rangle = \frac{(-1)^{n_r+n'_r} N_{n_r l} N_{n'_r l'}}{2} \frac{n_r ! \Gamma(l+3/2)}{\Gamma(n_r+l+3/2)} \frac{n'_r ! \Gamma(l'+3/2)}{\Gamma(n'_r+l'+3/2)} \Gamma\left(\frac{l+l'+s+3}{2}\right) \cdot \sum_k \binom{(l'+s-l)/2}{n_r-k} \binom{(l+s-l')/2}{n'_r-k} \binom{(l+l'+s+2k+1)/2}{k}, \tag{31}$$

$$\left\{\frac{(2n_r-2n'_r+l-l')^2}{(s+1)(s+2)} - \frac{s+2}{s+1}\right\}\langle n_r l \mid r^{s+2} \mid n'_r l' \rangle = \left\{\frac{[l(l+1)-l'(l'+1)](2n_r-2n'_r+l-l')}{s(s+2)} - (2n_r+2n'_r+l+l'+3)\right\}\langle n_r l \mid r^s \mid n'_r l' \rangle + \left\{\frac{s[l(l+1)+l'(l'+1)]}{2(s+1)} - \frac{s(s-1)}{4} - \frac{[l(l+1)-l'(l'+1)]^2}{4s(s+1)}\right\}\langle n_r l \mid r^{s-2} \mid n'_r l' \rangle. \tag{32}$$

这与文献[4,5]直接对球谐振子导出的径向矩阵元的通项公式及其递推关系完全一致,同理当 $b=0$ 或 $A=0$ 时,(12)和(28)式就分别退化为非球谐振子[6]或环形振子[11]的径向矩阵元的通项公式和不同幂次径向矩阵元之间所满足的递推关系.

众所周知,量子理论中 Schrödinger 方程能够精确求解的问题屈指可数,这些精确可解的例子不仅具有检验量子理论本身正确性的理论意义,还可在实际问题中获得广泛的应用,是众多实际问题近似解的基础.本文及文献[12]的工作说明,环形非球谐振子是量子理论中精确可解的又一实例,而且具有普遍性.球谐振子、非球谐振子和环形振子的有关结果均作为特例包含在本文和文献[12]的一般结论之中.

[1] Goldhammer P 1963 *Rev. Mod. Phys.* **35** 40

[2] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* Vol. Ⅰ (2nd ed.) (Beijing: Science Press) ch.6 (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学(卷Ⅰ) 第二版(北京 科学出版社)第6章]

[3] Mayer M G and Jensen J H D 1995 *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* (New York: Wiley)

[4] Hou C F, Sun X D, Zhou Z X and Li Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385 (in Chinese) [侯春风、孙秀冬、周忠祥、李 焱 1999 物理学报 **48** 385]

[5] Chen C Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 607 (in Chinese) [陈昌远 2000 物理学报 **49** 607]

[6] Chen C Y and Liu Y W 1999 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **23** 865 (in Chinese) [陈昌远、刘友文 1999 高能物理与核物理 **23** 865]

[7] Quesne C 1988 *J. Phys.* A **21** 3093

[8] Carpio-Bernido M V and Bernido C C 1989 *Phys. Lett.* A **134** 395

[9] Wang D Y and Huang B W 1999 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **23** 1078 (in Chinese) [王德云、黄博文 1999 高能物理与核物理 **23** 1078]

[10] Chen C Y and Sun D S 2001 *Acta Photon. Sin.* **30** 104 (in Chinese) [陈昌远、孙东升 2001 光子学报 **30** 104]

[11] Sun D S and Chen C Y 2001 *Acta Photon. Sin.* **30** 539 (in Chinese) [孙东升、陈昌远 2001 光子学报 **30** 539]

[12] Cheng T L and Chen C Y 2001 *Acta Quantum Opt. Sin.* **7** 67 [成天龙、陈昌远 2001 量子光学学报 **7** 67]

[13] Li G H 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2289 (in Chinese) [李光惠 1997 物理学报 **46** 2289]

[14] Hou C F, Jiang Y Y, Sun X D and Sun W J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1587 (in Chinese) [侯春风、姜永远、孙秀冬、孙万钧 1999 物理学报 **48** 1587]

[15] Li X M and Chen J H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1593 (in Chinese) [李晓梅、陈健华 1999 物理学报 **48** 1593]

[16] Wang Z X and Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) pp361—365 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论 (北京 科学出版社)第361—365页]

[17] Chen C Y 2000 *Chin. Phys.* **9** 731

General formulas and recurrence formulas for radial matrix elements of the ring-shaped non-spherical oscillator*

Chen Chang-Yuan　Sun Dong-Sheng　Liu You-Wen
(*Department of Physics*, *Yancheng Teachers College*, *Yancheng* 224002, *China*)
Cheng Tian-Long
(*Group of Physics*, *Yancheng Industry School*, *Yancheng* 224002, *China*)
(Received 24 July 2001; revised manuscript received 30 August 2001)

Abstract

The potential energy function of a ring-shaped non-spherical oscillator is $V(r,\theta)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{A}{r^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{b}{r^2\sin^2\theta}$. The exact energy equation and the normalized wavefunctions have been obtained. On the basis of previous works, in this paper, the general formulas and the recurrence formulas for radial matrix elements of the ring-shaped non-spherical oscillator are derived. The relevant results of spherical oscillator, non-spherical oscillator, and ring-shaped oscillator reported in the literature are contained in more general conclusions of this paper as special cases.

Keywords: ring-shaped non-spherical oscillator, radial matrix elements, general formulas, recurrence formulas
PACC: 0365, 0230

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Jiangsu Province, China (Grant No. 00KJD140007), and the Special Foundation of Yancheng Teachers College, China.