

单模光子在光纤中运动的极化及几何相因子^{*}

沈建其¹⁾²⁾ 朱红毅¹⁾²⁾ 施申蕾²⁾

¹⁾ 浙江大学现代光学仪器国家重点实验室 光及电磁波研究中心 杭州 310027)

²⁾ 浙江近代物理中心 浙江大学物理系 杭州 310027)

(2001 年 4 月 17 日收到 2001 年 8 月 20 日收到修改稿)

研究在光纤中运动的单模光子在固定系中的自旋算符表式,在将螺旋度当作不变量的基础上构造使光纤中光子极化面转动的有效哈密顿量,运用与不变量有关的么正变换方法,获得了光纤中运动光子演化方程(含时薛定谔方程)的精确解,并研究光子在光纤中运动的极化问题,包括几何相因子、总哈密顿量和波函数演化算符的显式.

关键词:几何相因子,光纤,不变量,么正变换

PACC:4250,1110,0365,0370

1 引言

1984 年, Berry 发现在绝热过程中量子力学波函数存在一不可积的相位因子——几何相因子^[1]. 随后, Chiao 和 Wu 就提出了一个几何相因子的物理实现,即光纤中运动光子的极化面的转动效应^[2],并由 Tomita 和 Chiao 等人用光纤实验证明了它的存在^[3,4]. 许多作者曾用经典的 Maxwell 方程或微分几何方法对光纤中运动光子的几何相位作了计算和解释^[5-11]. 本文作者在二次量子化的基础上,分别选用无穷多模式的光子场的螺旋度和哈密顿量作为不变量,利用不变量理论构造光子在光纤中运动的有效哈密顿量,从而把光纤中的光子运动问题转化为含时量子自旋模型问题,获得了光纤中运动光子的含时薛定谔方程的精确解,由此获得的几何相因子与 Tomita-Chiao 的光纤实验结果一致. 在作者过去的工作(将发表)中,不变量都是无穷多模式的积分形式,它们都是在薛定谔绘景中的力学量. 本文将随动坐标系中的单模光子的自旋角动量投影到固定坐标系中去,获得固定坐标系中的自旋算符表式,把单模光子的螺旋度当作不变量,研究光纤中单模光子运动的极化效应.

不变量理论是由 Lewis 和 Riesenfeld(L-R)在 1969 年首先提出^[12],该理论特别适合于精确求解含时薛定谔方程. Gao 在 1991 年发展了这一理论,提

出了推广的不变量理论及与不变量有关的么正变换方法^[13],通过引入基本不变量,使得可以找到含时多维系统的对易不变量的完全集^[14,15]. Li 和 Zhang 等人基于 L-R 的工作和 Gao 的工作提出了系统的不变量构造定理^[16]. 凡是哈密顿含时的系统就会产生几何相因子,而推广的不变量理论所获得的含时薛定谔方程的精确解自动包含动力学相因子和几何相因子,因此这一方法将 L-R 的形式理论发展成为研究含时系统薛定谔方程精确解和几何相因子的有效理论工具^[16].

2 单模光子自旋算符在固定系中的投影

研究几何相因子必须使用薛定谔绘景. 如果使用海森堡绘景或者其他绘景,则波函数有一个无法自定的与时间有关的相因子,从而无法把有物理意义的几何相因子确定下来. 因此需要首先获得在固定坐标系中单模光子的自旋算符.

光子场自旋角动量算符为^[17]

$$S^{ij} = - \int (\dot{A}^i A^j - \dot{A}^j A^i) d^3x. \quad (1)$$

将 $A^i(x, t)$ 和 $\dot{A}^i(x, t)$ 等的 Fourier 展开式代入(1)式,得

$$S^{ij} = -i \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} [\epsilon^i(k, 1) \epsilon^j(k, 2) - \epsilon^j(k, 1) \epsilon^i(k, 2)] \cdot [a^+(k, 1) a(k, 2) - a^+(k, 2) a(k, 1)], \quad (2)$$

* 国家自然科学基金(批准号:19775040)及浙江省重大科技项目(批准号:001101027)资助的课题.

其中 $a^+(k, 1), a(k, 1), a^+(k, 2)$ 和 $a(k, 2)$ 分别为在光子随动坐标系中两个偏振化矢量方向光子的产生、湮没算符. 根据光的横波特性和

$$\epsilon(k, 1) \times \epsilon(k, 2) = \frac{k}{k}, \quad (3)$$

可将自旋算符写成矢量形式

$$S = -i \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \frac{k}{k} [a^+(k, 1)a(k, 2) - a^+(k, 2)a(k, 1)], \quad (4)$$

于是在光子的随动坐标系中, 单模光子的自旋算符为

$$S = -i \frac{k}{k} [a^+(k, 1)a(k, 2) - a^+(k, 2)a(k, 1)]. \quad (5)$$

设在固定坐标系中三个单位矢量为 i, j, k , 将光子的两个极化矢量 $\epsilon(k, 1)$ 和 $\epsilon(k, 2)$ 展开为

$$\begin{aligned} \epsilon(k, 1) &= e_i i + e_j j + e_k k, \\ \epsilon(k, 2) &= f_i i + f_j j + f_k k, \end{aligned} \quad (6)$$

又设

$$\begin{aligned} a(k, 1) &\equiv a_i(k, 1) + a_j(k, 1) + a_k(k, 1) \\ &= i \int \frac{d^3 x \exp(ik \cdot x)}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega} \hat{\partial}_0 e_i A^i \\ &\quad + i \int \frac{d^3 x \exp(ik \cdot x)}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega} \hat{\partial}_0 e_j A^j \\ &\quad + i \int \frac{d^3 x \exp(ik \cdot x)}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega} \hat{\partial}_0 e_k A^k, \end{aligned} \quad (7)$$

同时有

$$a^+(k, 2) = a_i^+(k, 2) + a_j^+(k, 2) + a_k^+(k, 2). \quad (8)$$

由(7)和(8)式得

$$\begin{aligned} &[a_i(k, \lambda), a_j^+(k', \lambda')] \\ &= \delta^3(k - k') \delta_{ij} \epsilon_i(k, \lambda) \epsilon_j(k', \lambda'), \\ &[a_i(k, \lambda), a_j(k', \lambda')] \\ &= [a_i^+(k, \lambda), a_j^+(k', \lambda')] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$\begin{aligned} a_i(k, \lambda) &= \epsilon_i(k, \lambda) b_i(k, \lambda), \\ a_i^+(k, \lambda) &= \epsilon_i(k, \lambda) b_i^+(k, \lambda), \end{aligned} \quad (10)$$

则有

$$\begin{aligned} &[b_i(k, \lambda), b_j^+(k', \lambda')] = \delta^3(k - k') \delta_{ij}, \\ &[b_i(k, \lambda), b_j(k', \lambda')] \\ &= [b_i^+(k, \lambda), b_j^+(k', \lambda')] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

由(6)和(11)式得

$$a^+(k, 1)a(k, 2) - a^+(k, 2)a(k, 1)$$

$$\begin{aligned} &= (e_i f_j - e_j f_i) [b_i^+(k) b_j(k) - b_j^+(k) b_i(k)] \\ &\quad + (e_j f_k - e_k f_j) [b_j^+(k) b_k(k) - b_k^+(k) b_j(k)] \\ &\quad + (e_k f_i - e_i f_k) [b_k^+(k) b_i(k) - b_i^+(k) b_k(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

设 $k/k = (\sin \lambda \cos \gamma, \sin \lambda \sin \gamma, \cos \lambda)$ 利用(3)式得

$$\begin{aligned} e_i f_j - e_j f_i &= \cos \lambda, \\ e_j f_k - e_k f_j &= \sin \lambda \cos \gamma, \\ e_k f_i - e_i f_k &= \sin \lambda \sin \gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

于是自旋在 k 方向的投影(光子的螺旋度)为

$$\begin{aligned} I = \frac{k}{k} \cdot S &= -[a^+(k, 1)a(k, 2) - a^+(k, 2)a(k, 1)] \\ &= -i \{ \cos \lambda [b_i^+(k) b_j(k) - b_j^+(k) b_i(k)] \\ &\quad + \sin \lambda \cos \gamma [b_j^+(k) b_k(k) - b_k^+(k) b_j(k)] \\ &\quad + \sin \lambda \sin \gamma [b_k^+(k) b_i(k) - b_i^+(k) b_k(k)] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

从(14)式第二个等号右边看出, 随动坐标系自旋在 k 方向的投影等于算符矢量

$$S_{\text{固}} = -i [b_j^+ b_k - b_k^+ b_j, b_k^+ b_i - b_i^+ b_k, b_i^+ b_j - b_j^+ b_i] \quad (15)$$

在 k 方向的投影, 所以 $S_{\text{固}}$ 即为在固定坐标系中的光子自旋算符表式, 可以证明它满足一般角动量的代数关系

$$S_{\text{固}} \times S_{\text{固}} = i S_{\text{固}}. \quad (16)$$

由于

$$\begin{aligned} [S^k, \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^+ \pm i b_j^+)] &= [-i(b_i^+ b_j - b_j^+ b_i), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^+ \pm i b_j^+)] &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^+ \pm i b_j^+), \end{aligned} \quad (17)$$

所以 $S^k = -i(b_i^+ b_j - b_j^+ b_i)$ 的本征值方程 $S^k |\Phi_{\pm}(k)\rangle = |\Phi_{\pm}(k)\rangle$ 的本征态为

$$|\Phi_{\pm}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^+(k) \pm i b_j^+(k)) |0\rangle. \quad (18)$$

3 含时薛定谔方程的精确解与光纤中的几何相因子

在弯曲光纤中运动光子的极化问题是一个含时问题, 只有非共面弯曲的光纤中的光子才具有几何相因子^[2]. 根据不变量理论, 为了精确求解含时问题, 需要构造光子在光纤中传播的不变量和哈密顿量.

(14)式的 $I(t)$ 可以改写成

$$\begin{aligned} I &= \sin \lambda \cos \gamma S^i + \sin \lambda \sin \gamma S^j + \cos \lambda S^k \\ &= \frac{1}{2} \sin \lambda \exp(-i\gamma) S_+ + \frac{1}{2} \sin \lambda \exp(i\gamma) S_- + \cos \lambda S^k, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $S_{\pm} = S^i \pm iS^j$.

如果非共面弯曲的光纤切线缓变, 光纤中的光子动量任意时刻都沿着与光纤切线一致的方向, 那么光纤中的螺旋度本征值不变, 根据 L-R 的不变量理论, $K(t)$ 是一个不变量. 光子在光纤中运动的无穷小转动算符为

$$U_R = 1 - i\mathbf{g} \cdot \mathbf{J}, \quad (20)$$

其中无穷小参量为

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{k}}}{k^2} dt, \quad (21)$$

于是光子态 $|\sigma, K(t)\rangle$ (σ 为光子的螺旋度本征值) 所满足的演化方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\sigma, K(t)\rangle = \frac{K(t) \times \dot{K}(t)}{k^2} \cdot \mathbf{S} |\sigma, K(t)\rangle, \quad (22)$$

其中 $H_{\text{eff}}(t) = \frac{K(t) \times \dot{K}(t)}{k^2} \cdot \mathbf{S}$ 为光纤中运动光子与光纤介质相互作用的有效哈密顿量, 显然它与不变量 $K(t)$ 一起满足如下的不变量方程:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} + \frac{1}{i} [K(t), H_{\text{eff}}(t)] = 0. \quad (23)$$

可以设

$$\frac{K(t) \times \dot{K}(t)}{k^2} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta), \quad (24)$$

其中 θ 和 ϕ 为含时参数, 有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(t)$ 可以进一步化为

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sin\theta \exp(-i\phi) S_+ + \frac{1}{2} \sin\theta \exp(i\phi) S_- + \cos\theta S^k. \quad (25)$$

由 (13) 和 (24) 式, 得到两个关于 θ 和 ϕ 的辅助方程

$$\dot{\gamma} \sin^2 \lambda = \cos\theta,$$

$$\dot{\lambda} \cos\gamma - \dot{\gamma} \cos\lambda \sin\lambda \sin\gamma = \sin\theta \sin\phi. \quad (26)$$

设不变量的本征态为 $|\psi_{\sigma}(k, t)\rangle$, 根据 L-R 不变量理论, 含时薛定谔方程的解 $|\sigma, K(t)\rangle$ 与不变量本征态 $|\psi_{\sigma}(k, t)\rangle$ 只相差一个相位因子 $\exp[i\varphi_{\sigma}(t)]$, 其中

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma}(t) = & \int_0^t \langle \psi_{\sigma}(k, t') | H_{\text{eff}}(t') \\ & - i \frac{\partial}{\partial t'} | \psi_{\sigma}(k, t') \rangle dt', \end{aligned} \quad (27)$$

于是含时薛定谔方程 (22) 的特解为

$$|\sigma, K(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i} \varphi_{\sigma}(t)\right] |\psi_{\sigma}(k, t)\rangle. \quad (28)$$

为了得到不变量 $K(t)$ 的本征态 $|\psi_{\sigma}(k, t)\rangle$ 及 $\varphi_{\sigma}(t)$, 利用与不变量有关的么正变换方法^[13], 将含时的不变量 $K(t)$ 变为不含时的不变量 I_0 , 即

$$I_0 = V^{\dagger}(t) K(t) V(t), \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(\beta S_+ - \beta^* S_-), \\ V^{\dagger}(t) &= \exp(\beta^* S_- - \beta S_+). \end{aligned} \quad (30)$$

经复杂冗长的计算, 当么正变换 V 中的含时参数取为

$$\beta = -\frac{\lambda}{2} \exp(-i\gamma), \quad \beta^* = -\frac{\lambda}{2} \exp(i\gamma) \quad (31)$$

时, I_0 中 $S_{\pm}$ 的系数为零, S^k 的系数为 1, 即经么正变换后得到与时间无关的 I_0 ,

$$I_0 = S^k. \quad (32)$$

在么正变换 $V(t)$ 下, 有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(t)$ 变换为

$$\begin{aligned} H_V(t) &= V^{\dagger} H_{\text{eff}} V - V^{\dagger} i \frac{\partial}{\partial t} V \\ &= \dot{\gamma}(t) [1 - \cos\lambda(t)] S^k, \end{aligned} \quad (33)$$

S^k 和 I_0 只相差一个含时 c -数因子. 根据 (18) 式, 已求得 S^k 的本征态 $|\Phi_{\pm}(k)\rangle$, 这样含时薛定谔方程的特解即为

$$|\pm, K(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i} \varphi_{\pm}(t)\right] V(t) |\Phi_{\pm}(k)\rangle. \quad (34)$$

根据 (27) 式, 相因子

$$\varphi_{\pm}(t) = \pm \int_0^t \dot{\gamma}(t') [1 - \cos\lambda(t')] dt'. \quad (35)$$

注意, 根据辅助方程 (26) 可以证明, 在非共面弯曲光纤中传播的光子的与有效哈密顿量有关的动力学相位为零. (35) 式所表示的是与非共面弯曲光纤中光子运动路径有关的几何相因子. 这一几何相因子与光子的频率无关, 不具有相移和色散性质^[18].

有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(t)$ 实际上概括了光子与光纤介质的相互作用. 光纤中的光子的总哈密顿量可以表示为^[2]

$$\begin{aligned} H(t) &= \omega_k [a^{\dagger}(k, 1) a(k, 1) \\ &+ a^{\dagger}(k, 2) a(k, 2) + 1] + H_{\text{eff}}(t) \end{aligned} \quad (36)$$

显然如果它代替有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(t)$, 不变量方程 (23) 仍旧满足. 自由光子场哈密顿量 $\omega_k [a^{\dagger}(k, 1) a(k, 1) + a^{\dagger}(k, 2) a(k, 2) + 1]$ 导致了动力学相因子.

这里有一个问题需要说明的是,尽管单模光子只有两个自由度(相应于左旋和右旋偏振光子),但是由(15)式看出,在固定坐标系中单模光子自旋却有三个自由度(相应于三组产生、湮没算符)表示.这是由于这三组产生湮没算符是光子随动坐标系中两个偏振化矢量光子的产生、湮没算符在固定坐标系三个方向的投影基矢,并非一个光子的产生、湮没算符.所以通过由随动坐标系向固定坐标系的坐标变换及(8)–(10)式的代换,并没有增加单模光子的自由度.

由以上的讨论可知,与不变量有关的么正变换方法可以将波函数演化算符的与时序算符有关的形式解

$U(t) = P \exp \left[\frac{1}{i} \int_0^t H_{\text{eff}}(t') dt' \right]$ 化为显式解.假定光子的初动量 $k(t=0)$ 沿第 3 方向,即有

$$k^1 = 0, \quad k^2 = 0, \quad k^3 = k, \quad (37)$$

相应地,有

$$\lambda(0) = 0, \quad V(0) = 1. \quad (38)$$

利用与不变量有关的么正变换方法,可以证明演化算符为

$$U(t) = V(t) \exp(fJ_3), \quad (39)$$

其中

$$f = \frac{1}{i} \int_0^t \dot{\gamma}(t') [1 - \cos \lambda(t')] dt'. \quad (40)$$

4 结 论

由于研究几何相因子必须用薛定谔绘景,本文通过随动坐标系中单模光子自旋算符在固定坐标系中的投影得到光纤中单模光子在固定坐标系中的自旋算符表式.在将螺旋度当作不变量的基础之上,运用与不变量有关的么正变换方法,获得含时薛定谔方程的精确解和几何相因子表达式,这一结果与 1991 年的单模光子光纤实验一致^[4].

从本文的讨论看出,与不变量有关的么正变换方法是研究几何相因子^[19,20]的得力工具.该理论方法通过么正变换,回避直接求解含时不变量的本征态,代之以求解不含时不变量的本征态,回避演化算符的与时序有关的隐式解,代之以与不变量有关的么正变换,得到了演化算符的显式解.因而这一方法对于研究含时量子系统和含时场论系统具有重要意义^[14,15].

本文部分工作得到高孝纯教授的帮助,特此致谢.

-
- [1] Berry M V 1984 *Proc. Roy. Soc. London A* **392** 45
Li B Z, Hou B P and Yu W L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 712 (in Chinese) 李伯臧、侯邦品、余万伦 1998 物理学报 **47** 712
- [2] Chiao R Y and Wu Y S 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 933
- [3] Tomita A and Chiao R Y 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 937
- [4] Kwiat P G and Chiao R Y 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 588
- [5] Ross J N 1984 *Opt. Quantum Electron.* **16** 455
- [6] Haldane F D M 1986 *Opt. Lett.* **11** 730
- [7] Jiao H, Wilkinson S R and Chiao R Y 1988 *Phys. Rev. A* **39** 3475
- [8] Ryder L H 1991 *Eur. J. Phys.* **12** 15
- [9] Zhou Y, Wu Z H and Ge M L 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 316
- [10] Robinson A L 1986 *Science* **234** 424
- [11] Haldane F D M 1987 *Phys. Rev. Lett.* **15** 1788
Chiao R Y and Tomita A 1987 *Phys. Rev. Lett.* **15** 1789
- [12] Lewis H R and Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458
- [13] Gao X C, Xu J B and Qian T Z 1991 *Phys. Rev. A* **44** 7016
Gao X C, Gao J, Qian T Z and Xu J B 1996 *Phys. Rev. D* **53** 4374
- [14] Gao X C, Fu J, Li X H and Gao J 1998 *Phys. Rev. A* **57** 753
- Fu J, Gao X C, Xu J B and Zou X B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1011 (in Chinese) 符建、高孝纯、许晶波、邹旭波 1999 物理学报 **48** 1011
- [15] Gao X C, Gao J and Fu J 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 606 (in Chinese) 高孝纯、高隽、符建 1996 物理学报 **45** 606
Fu J, Gao X C, Xu J B and Zou X B 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 606 (in Chinese) 符建、高孝纯、许晶波、邹旭波 1998 物理学报 **47** 606
- [16] Li B Z, Zhang L Y and Dong X D 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2081 (in Chinese) 李伯臧、张凌云、张向东 1997 物理学报 **46** 2081
Yan F L, Yang L G and Li B Z 1999 *Phys. Lett. A* **251** 289
- [17] Bjorken J D and Drell S D 1965 *Relativistic Quantum Fields* (New York: McGraw-Hill)
- [18] Badurek G, Weinfurter H, Cahler R, Kollmar A and Wehinger S 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 307
- [19] Liu D Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1233 (in Chinese) 刘登云 1998 物理学报 **47** 1233
- [20] Jing H and Wu J S 2000 *Chin. Phys. Lett.* **9** 481

Polarization of single-mode photon propagating inside the fiber and its geometric phase factor^{*}

Shen Jian-Qi^{1 2)} Zhu Hong-Yi^{1 2)} Shi Shen-Lei²⁾

¹⁾ *State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation ,Center for Optical and Electromagnetic Research ,Zhejiang University ,Hangzhou 310027 ,China)*

²⁾ *Zhejiang Institute of Modern Physics and Department of Physics ,Zhejiang University ,Hangzhou 310027 , China)*

(Received 17 April 2001 ;revised manuscript received 20 August 2001)

Abstract

The form of the spin operator of the single-mode photon propagating inside an optical fiber is derived for a fixed system. On the basis that the helicity of the photon is regarded as an invariant ,we construct the effective Hamiltonian ,which leads to the rotating polarization plane of the single-mode photon ,and obtain the exact solutions of the time-dependent Schrödinger equation describing the motion of a photon in the optical fiber ,by making use of the invariant-related unitary transformation formulation. Based on this ,we investigate the polarization of the single-mode photon moving in the fiber , and the physical consequences comprise the geometric phase factor ,the total Hamiltonian as well as the explicit expression for the time-evolution operator of the wave function.

Keywords : geometric phase factor , optical fiber , invariant , unitary transformation

PACC : 4250 , 1110 , 0365 , 0370

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No.19775040) ,and the Special Research Foundation of Zhejiang Province , China(Grant No.001101027).