第 52 卷 第 5 期 2003 年 5 月
1000-3290/2003/52(05)/1057-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.5,May,2003

高阶微商系统 Dirac 猜想的一个反例*

李爱民　张晓沛　李子平

(北京工业大学数理学院,北京　100022)

(2002 年 7 月 29 日收到;2002 年 9 月 13 日收到修改稿)

由扩展正则作用量导出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的扩展正则 Noether 恒等式. 从广义约束 Hamilton 系统相空间中对称性分析,给出高阶微商系统 Dirac 猜想的一个反例. 用正则 Noether 定理、正则 Noether 恒等式和扩展正则 Noether 恒等式说明在此反例中 Dirac 猜想失效,讨论中没有将约束线性化.

关键词:高阶微商系统,约束 Hamilton 系统,正则对称性,Dirac 猜想

PACC:0320,1110,1115,1130

用奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间中存在固有约束,为约束 Hamilton 系统. 虽然对约束系统的 Dirac 理论及其推广的研究取得了相当的进展,特别是规范场等场论量子化中的一些主要问题已经得到解决,但是约束系统 Dirac 理论中的若干问题,至今在文献中仍不断地有所讨论,其中之一就是 Dirac 猜想[1,2]. Dirac 在他的广义正则形式理论中,曾猜想:所有第一类约束均是规范变换的生成元,它们生成物理态之间的等价变换. 该猜想涉及约束 Hamilton 系统量子化中规范条件的选取,在现代量子场论中占基本地位. 高阶微商理论在规范场理论,在引力场理论,修正 KdV 方程,超对称,非线性 σ-模型等问题中有广泛的讨论,也存在 Dirac 猜想问题. 然而,关于 Dirac 猜想是否有效一直有争议,所有争议均是考察由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的运动方程不严格等价于对应的 Lagrange 方程[3-5]. Cawley 等人还给出了若干反例[6,7]. 近来,重新讨论了若干反例[8-10],指出 Cawley 等人的反例不是真正的反例,因为他们采用了将约束线性化的步骤,导致了强等和弱等概念的混淆[10,11].

本文由扩展正则作用量导出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的扩展正则 Noether 恒等式. 并且基于广义约束 Hamilton 系统在相空间中的对称性质,给出了一个高阶微商奇异 Lagrange 量系统 Dirac 猜想的新的反例. 由 Noether 第一定理指出 Dirac 猜想在此例中失效;同时,根据正则 Noehter 恒等式与扩展正则 Noether 恒等式对此反例的讨论得出结论:与第一类约束相联系的约束乘子沿着系统运动的轨线和离开系统运动的轨线都可能不是任意的,从而说明了 Dirac 猜想在该反例中失效. 所有这些讨论均未涉及对约束作线性化处理.

考虑动力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商,即

$$L = L(t_i ;q^i_{(0)}(t), q^i_{(1)}(t), \cdots, q^i_{(N_i)}(t)),$$

其中 $q^i_{(s)} = \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}q^i = D^s q^i$. Ostrogradsky 变换给出广义正则动量

$$p_i^{(N_i-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N_i)}}$$

$$(s = 1,2,\cdots,N_i - 1), \tag{1a}$$

$$p_i^{(s-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} - \dot{p}_i^{(s)}. \tag{1b}$$

系统的广义正则 Hamilton 量为

$$H_c = p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - L(t_i ;q^i_{(s)}, \cdots, q^i_{(N_i)}), \tag{2}$$

其中重复指标代表求和,H_c 由(1a)式消去最高阶微商 $q^i_{(N_i)}$ 得到. 对高阶微商奇异 Lagrange 系统,广义 Hess 矩阵 $[\partial^2 L/\partial q^i_{(N_i)}\partial q^j_{(N_j)}]$ 退化,由(1a)不能解出所有 $q^i_{(N_i)}$,表明该系统在相空间存在约束. 设初级第一类约束 $\phi_a^0 \approx 0(a = 1,2,\cdots,k)$,第二类约束 $\theta_b \approx 0(i = 1,2,\cdots,I_1)$. 其中 $\approx$ 为 Dirac 意义下的弱等记号. 任意力学量 $F(t ;q^i_{(s)}, p_i^{(s)})$ 随时间的演化

* 北京市自然科学基金(批准号:1942005)资助的课题.

适合

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \lambda^\alpha \{F, \phi_\alpha^0\} - \{F, \theta_{b'}\} c_{b'b}^{-1} \left(\{\theta_{b'}, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t} \right), \quad (3)$$

其中与初级第一类约束相联系的约束乘子 $\lambda^\alpha(t)$ 为任意函数.而 $c_{b'b}^{-1}$ 满足 $c_{b'b}^{-1}\{\theta_{b'}, \theta_{b''}\} = \delta_{b'b''}$, $\{\cdot, \cdot\}$ 代表广义 Poisson 括号.设 δt 为无穷小参数,由(3)式可计算出 $F(\delta t)$ 的值.选取另一约束乘子 $\overline{\lambda}^\alpha(t)$ 时,可求出 $\overline{F}(\delta t)$ 的值.两者之差为

$$\delta F = \varepsilon^\alpha \{F, \phi_\alpha^0\}, \quad \varepsilon^\alpha = \delta t[\lambda^\alpha(0) - \overline{\lambda}^\alpha(0)]. \quad (4)$$

(4)式表明初级第一类约束为规范变换的生成元,取参数分别为 ε^α, η^α, $-\varepsilon^\alpha$ 和 $-\eta^\alpha$,相继进行那样的变换,利用广义 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式,得

$$\delta F = \varepsilon^\alpha \eta^{\alpha'} \{F, \{\phi_\alpha^0, \phi_{\alpha'}^0\}\}. \quad (5)$$

(5)式表明任意两个初级第一类约束的广义 Poisson 括号也是规范变换的生成元. $\{\phi_\alpha^0, \phi_{\alpha'}^0\}$ 仍为第一类约束,它们可能是初级第一类约束,也可能是次级第一类约束.这样就将 Dirac 猜想推广到高阶微商系统:所有第一类约束均是规范变换的生成元.提出此猜想的依据是约束乘子 $\lambda^a(t)$ 是任意的.如果高阶微商系统 Dirac 猜想成立,那么,不仅初级第一类约束应计入 Hamiltonian 量中,次级第一类约束也应计入其中.对于仅含第一类约束的系统,设所含的初级第一类约束为 $\phi_a^0 \approx 0 (a = 1, 2, \cdots, K_1)$,次级第一类约束为 $\chi_l \approx 0 (l = 1, 2, \cdots, l')$,则系统的正则方程应由扩展 Hamilton 量 H_E 导出[3—5]

$$H_E = H_c + \lambda^\alpha \phi_\alpha^0 + \mu^l \chi_l = H_c' + \lambda^\alpha \Lambda_\alpha, \quad (6)$$

其中 Lagrange 约束乘子 λ^α, μ^l 是时间的任意函数, Λ_α 代表所有第一类约束, λ^α 为相应的约束乘子,它们是任意的,由约束的自洽性要求不能确定它们.下面考察与第一类约束相应的约束乘子的任意性问题.

假设系统的正则作用量在下列定域变换

$$\begin{aligned} t' &= t + R^\sigma \varepsilon_\sigma = t + a_k^\sigma D^k \varepsilon_\sigma(t), \\ q_{(s)}^{i'}(t') &= q_{(s)}^i(t) + S_{(s)}^{i\sigma} \varepsilon_\sigma(t), \\ p_i^{(s)'}(t') &= p_i^{(s)}(t) + T_i^{(s)\sigma} \varepsilon_\sigma(t) \end{aligned} \quad (7)$$

下(其中 $\varepsilon_\sigma(t)(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$ 为任意函数)是不变的,其中 $S_{(s)}^{i\sigma}$ 和 $T_i^{(s)\sigma}$ 为线性微分算符,且系统的正则方程是由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的,由正则 Noether 恒等式,沿着系统运动的轨线,有[8]

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_i^{(s)\sigma}\left(\lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i^{(s)}}\right) - \tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}_i^{(s)} \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial p_i^{(s)}}\right) \\ &+ \tilde{S}_{(s)}^{i\sigma}\left(\lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q_{(s)}^i}\right) - \tilde{R}^\sigma\left(\dot{q}_{(s)}^i \lambda^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial q_{(s)}^i}\right) \approx 0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\tilde{S}_{(s)}^{i\sigma}$, $\tilde{T}_i^{(s)\sigma}$, $\tilde{R}^\sigma$ 是相应于 $S_{(s)}^{i\sigma}$, $T_i^{(s)\sigma}$, R^σ 的伴随算符[8].对允许 Lagrange 量,如果(5)式给出不自洽的结果,表明 Dirac 猜想失效.如果(5)式确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系,此时该约束乘子并非是任意的.这就对 Dirac 猜想的提出产生疑问,Dirac 猜想失效.

由高阶微商系统作用量的变分原理导出其 Euler-Lagrange 方程时[12],要求等时变分和微商可交换,即 $\delta \dot{q}_{(s)}^i = D^s(\delta q^i)$,在 Hamilton 体制中,我们将其视为一个基本要求,仿一阶微商情形[13]同样可证明由扩展 Hamilton 量 H_E 决定的正则作用量

$$I_E(q_{(s)}^i, p_i^{(s)}, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t (p_i^{(s)} q_{(s)}^i - H_E) \quad (9)$$

在下列变换

$$\begin{aligned} \delta q_{(s)}^i &= \varepsilon^a(t)\{q_{(s)}^i, \Lambda_a\} = S_{b(s)}^i \varepsilon^b(t), \\ \delta p_i^{(s)} &= \varepsilon^a(t)\{p_i^{(s)}, \Lambda_a\} = T_{ib}^{(s)} \varepsilon^b(t), \\ \delta \lambda^a &= \delta_b^a \dot{\varepsilon}^b(t) - C_b^a \varepsilon^b(t) + \lambda^c C_{bc}^a \varepsilon^b(t) = U_b^a \varepsilon^b(t) \end{aligned} \quad (10)$$

下不变,从而[12]

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\delta I_E}{\delta p_i^{(s)}} \delta p_i^{(s)} + \frac{\delta I_E}{\delta q_{(s)}^i} \delta q_{(s)}^i + \frac{\delta I_E}{\delta \lambda^a} \delta \lambda^a\right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i^{(s)} S_b^i \varepsilon^b(t)] \mathrm{d}t = 0, \quad (11)$$

式中

$$\frac{\delta I_E}{\delta p_i^{(s)}} = \dot{q}_{(s)}^i - \frac{\partial H_E}{\partial p_i^{(s)}}, \quad \frac{\delta I_E}{\delta q_{(s)}^i} = -\dot{p}_i^{(s)} - \frac{\partial H_E}{\partial q_{(s)}^i}, \quad \frac{\delta I_E}{\delta \lambda^a} = -\frac{\partial H_E}{\partial \lambda^a}, \quad (12)$$

由于 $\varepsilon^b(t)$ 的任意性,可选取它们及其微商在区间端点为零,(11)式左端第二项为零,将左端第一个积分各项作分部积分,根据变分学基本引理和 $\varepsilon^b(t)$ 的任意性,可得扩展正则 Noether 恒等式

$$\tilde{T}_{ib}^{(s)}\left(\dot{q}_{(s)}^i - \frac{\partial H_E}{\partial p_i^{(s)}}\right) - \tilde{S}_{b(s)}^i\left(\dot{p}_i^{(s)} + \frac{\partial H_E}{\partial q_{(s)}^i}\right) - \tilde{U}_b^a\left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda^a}\right) = 0. \quad (13)$$

(13)式也许可确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系,得出(13)式并未利用由 H_E 确定的运动方程,(13)式成立与系统运动方程无关,这说

明离开系统运动的轨线该约束乘子也有可能不是任意的.

(8)式表明与第一类约束相联系的约束乘子沿着系统运动的轨线可能受到限制,(13)式表明离开系统运动的轨线同样也可能受到限制,这违背了 Dirac 猜想中与第一类约束相联系的约束乘子的任意性[1],该猜想在一些反例[8,9]中失效也就很自然了.

考虑一个二阶微商 Lagrange 量

$$L = \frac{1}{2}e^{2u(y)}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}e^{-2v(-y)}\ddot{z}^2. \tag{14}$$

下面给出函数 $u(y)$, $v(-y)$ 满足的条件. 由 Lagrange 运动方程表明其在 x, y, z 方向的运动是允许的.

过渡到 Hamilton 描述,由 Ostrogradsky 变换,相应的广义正则动量为

$$p_x^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = e^{2u(y)}\ddot{x}, \quad p_y^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = 0,$$

$$p_z^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} = e^{-2v(-y)}\ddot{z}, \tag{15a}$$

$$p_x^{(0)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{p}_x^{(1)} = -\dot{p}_x^{(1)},$$

$$p_y^{(0)} = -\dot{p}_y^{(1)}, \quad p_z^{(0)} = \dot{p}_z^{(1)}. \tag{15b}$$

由(2)式,正则 Hamilton 量为

$$H_c = \frac{1}{2}\left[e^{-2u(y)}p_x^{(1)2} + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^{(1)2}\right] + p_x^{(0)}\dot{x} + p_y^{(0)}\dot{y} + p_z^{(0)}\dot{z}. \tag{16}$$

初级约束为 $\phi^0 = p_y^{(1)} \approx 0$,总 Hamilton 量 $H_T = H_c + \lambda\phi^0$,其中 $\lambda(t)$ 为约束乘子. 由初级约束的自洽性条件得出次级约束

$$\phi^1 = \{\phi^0, H_T\} = -p_y^{(0)} \approx 0, \tag{17}$$

$$\phi^2 = \{\phi^1, H_T\} = e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(1)2} + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(1)2} \approx 0, \tag{18}$$

$$\phi^3 = \{\phi^2, H_T\} = 2e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(1)}p_x^{(0)} + 2e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(1)}p_z^{(0)} \approx 0, \tag{19}$$

$$\phi^4 = \{\phi^3, H_T\} = e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(0)2} + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(0)2} \approx 0. \tag{20}$$

当函数 $u(y)$, $v(-y)$ 满足

$$u''(y) - 2[u'(y)]^2 = 0;$$
$$-v''(-y) - 2[v'(-y)]^2 = 0 \tag{21}$$

时,ϕ^4 的自洽性条件自动满足,不再产生出新的次级约束. 解出 $u(y)$, $v(-y)$, $u(y) = \frac{1}{2}e^{C_1+2y} + C_2$; $v(-y) = \frac{1}{2}e^{C_3-2y} + C_4$(其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为常数),全部约束 $\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4$ 均为第一类约束.

正则 Lagrange 量为

$$L^p = p_x^{(1)}\ddot{x} + p_y^{(1)}\ddot{y} + p_z^{(1)}\ddot{z} + p_x^{(0)}\dot{x} + p_y^{(0)}\dot{y} + p_z^{(0)}\dot{z} - H_c$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^{(1)2} + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^{(1)2}, \tag{22}$$

在相应的相空间的整体变换

$$x' = x + \alpha e^{-w}z, \quad z' = z + \alpha e^{w}x \qquad |\alpha \ll 1|, \tag{23}$$

$$p_x^{(1)\prime} = p_x^{(1)} - \alpha e^{w}p_z^{(1)}, \quad p_z^{(1)\prime} = p_z^{(1)} + \alpha e^{-w}p_x^{(1)}$$
$$(|\alpha| \ll 1) \tag{24}$$

下(其中 $w(y) = u(y) + v(-y)$),L^P, ϕ^0 不变,应用相空间的 Noether 定理,由 H_T 可得守恒量[10]

$$e^{-w}p_z^{(s)}x_{(s)}^1 - e^{w}p_x^{(s)}x_{(s)}^3 = \text{const}. \tag{25}$$

此守恒量与由位形空间 Noether 定理导出的结果相同[12].

如果 Dirac 猜想成立,其运动方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出[3,5]

$$H_E = H_c + \lambda\phi^0 + \mu_a\phi^a = H_c + H_1$$
$$(H_1 = \lambda\phi^0 + \mu_a\phi^a, \ a = 1,2,3,4), \tag{26}$$

其中 $\mu(t)$ 为另一约束乘子. 因次级约束(17)—(20)式在(23)式的变换下不具有变换不变性,所以不能按正则 Noether 定理,由 H_E 出发得到守恒量(25)式[10],说明 Dirac 猜想失效.

下面从相空间的 Noether 恒等式来考察这个问题. 系统 Lagrange 量 L^P 在定域变换

$$p_x^{(1)\prime} = p_x^{(1)} - \alpha(t)e^{w}p_z^{(1)},$$
$$p_z^{(1)\prime} = p_z^{(1)} + \alpha(t)e^{-w}p_x^{(1)} \qquad (|\alpha(t)| \ll 1) \tag{27}$$

下不变,从(8)式得

$$\theta(y)(2\mu_2 p_x^{(1)}p_z^{(1)} + \mu_3 p_x^{(1)}p_z^{(0)} + 2\mu_4 p_x^{(0)}p_z^{(0)}) + p_z^{(0)}p_z^{(1)}(\mu_3 v'(-y) + \mu_4 u'(y)) = 0, \tag{28}$$

其中 $\theta(y) = u(y) - v(-y)$. 从(28)式可以看出约束乘子 μ_2, μ_3, μ_4 不是任意的,约束乘子受到限制,说明与第一类约束相联系的约束乘子沿着系统运动的轨线可能受到限制,Dirac 猜想在这个例子中不成立.

利用扩展正则 Noether 恒等式(13)讨论这个例子也可得到结论:约束乘子也不是任意的,表明离开系统运动的轨线约束乘子同样也可能受到限制,Dirac 猜想在这个例子中不成立.

以上从正则 Noether 定理、正则 Noehter 恒等式

与扩展正则 Noether 恒等式三个方面讨论 Dirac 猜想在新的反例中失效.而在所有的讨论中均未对约束线性化.从前面讨论的例子知道,与第一类约束相联系的约束乘子不再具有任意性,该猜想在新的反例中失效也就很自然了.

[1] Dirac P A M 1964 *Lecture on Quantum Mechanics* (New York:Yeshiva University)

[2] Wang A M and Ruan T N 1996 *Phys Rev*. A **54** 57

[3] Costa M E V, Girotti H O and Simões T J M 1985 *Phys Rev*. D **32** 405

[4] Cabo A 1986 *J. Phys*. *A*:*Math Gen*. **19** 629

[5] Henneaux M, Teiteboim C and Zanell J 1990 *Nucl Phys*. **31** 448

[6] Allock G R 1975 *Phil*. *Trans Roy Soc*. A **279** 485

[7] Cawley R 1979 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **42** 413
Cawley R 1980 *Phys Rev*. D **21** 2988
Frenkel A 1980 *Phys*. *Rev*. D **21** 2986

[8] Li Z P 1991 *J. Phys*. A **24** 225

[9] Li Z P 1992 *Acta Phys*. *Sin*. **41** 710 (in Chinese) [李子平 1992 **物理学报 41** 710]
Li Z P 1993 *Chinese Phys*. *Lett*. **10** 68
Li A M, Jiang J H and Li Z P 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 943 (in Chinese) [李爱民、江金环、李子平 2002 **物理学报 51** 943]

[10] Li Z P 1994 *Phys*. *Rev*. E **52** 876

[11] Qi Z 1990 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **29** 1309

[12] Li Z P 1999 *Constrained Hamiltonian Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1999 约束哈密顿系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]
Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *China Phys*. **9** 401
Qiao Y F, Li R J and Zhao S H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 816 (in Chinese) [乔永芬、李仁杰、赵淑红 2001 **物理学报 50** 816]
Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 401

[13] Banerjee R, Rothe H J and Rothe K D 1999 *Phys*. *Lett*. B **463** 248
Banerjee R, Rothe H J and Rothe K D 2000 B **479** 429
Banerjee R, Rothe H J and Rothe K D 2000 *J*. *phys*. A **33** 2059

A counterexample of Dirac's conjecture for a system with a higher-order singular Lagrangian*

Li Ai-Min Zhang Xiao-Pei Li Zi-Ping

(*College of Applied Sciences*, *Beijing Polytechnic University*, *Beijing* 100022, *China*)

(Received 29 July 2002; revised manuscript received 13 September 2002)

Abstract

The extended canonical Noether identities derived from an extended action in the phase space for a system with a higher-order singular Lagrangian are formulated. Based on the canonical symmetries of generalized constrained Hamiltonian systems, a counterexample to a conjecture of Dirac is given. Using the canonical first Noether theorem and canonical Noether identities and the extended canonical Noether identities, we have shown that Dirac's conjecture fails for a system with a higher-order singular Lagrangian in which there is no linearization of constraint in our treatment.

Keywords: higher-order derivatives theories, generalized constrained Hamiltonian systems, canonical symmetries, Dirac's conjecture

PACC: 0320, 1110, 1115, 1130

* Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1942005).