物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52, No.5, May, 2003

Jacobi 椭圆函数展开法的新应用*

张善卿 李志斌
(华东师范大学计算机科学技术系,上海 200062)
(2002 年 7 月 16 日收到;2002 年 8 月 30 日收到修改稿)

通过引入"秩"的概念,对非线性发展方程进行分类,将 Jacobi 椭圆函数展开法推广应用到一类新的非线性发展方程,并给出了它们的精确周期解.

关键词:非线性发展方程,周期解,孤立波解,Jacobi 椭圆函数
PACC:0340K,0290

1. 引 言

求解非线性发展方程精确解在非线性问题的研究中占有很重要的地位. 近几年,人们对求解非线性发展方程精确解提出了许多方法,如双曲函数法[1—3],齐次平衡法[4—6],混合指数法[7,8]等,但人们对非线性发展方程周期解的研究却比较少,Porubov[9,10]等利用 Weierstrass 椭圆函数求得了一些非线性发展方程的周期解,但求解过程比较麻烦. 最近,刘等提出了 Jacobi 椭圆函数展开法[11—14],求得了一大类非线性波动方程的周期解,包括对应的冲击波解和孤立波解,并指出此方法适用于只含有偶数阶导数项或只含有奇数阶导数项的非线性发展方程[13]. 本文利用文献[15]提出的"秩"的概念,将 Jacobi 椭圆函数展开法应用的方程类型进行推广,并给出较为准确的结论. 最后举例加以说明,得到一类非线性发展方程的新的周期解,这些解也可退化为对应的冲击波解或孤立波解.

文献[15]提出了"秩"的概念. 设非线性发展方程的一般形式

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

其中 P 是关于变元 $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots$ 的多项式.

在行波变换

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = k(x - ct) \tag{2}$$

下,(1)式约化为如下的常微分方程:

$$O(u, u', u'', u''', \cdots) = 0, \tag{3}$$

其中"$'$"为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$. (3)式中任何一项可用下列通式表示(不考虑其系数)为

$$u^{k_0}(u')^{k_1}(u'')^{k_2}\cdots(u^{(m)})^{k_m}, \tag{4}$$

其中 k_j 是实常数,于是可定义该项的"秩"为

$$0k_0 + 1k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m. \tag{5}$$

实际上就是该项中 u 的各阶导数与其相应幂次乘积之和(可以认为 u 为自身的零阶导数). 有了"秩"的概念,我们就可以把所研究的非线性方程分为两种类型:1)类型Ⅰ,简称"秩"同类,即各项的"秩"的取值要么全为偶数要么全为奇数;2)类型Ⅱ,简称"秩"异类,即各项的"秩"的取值为奇数与偶数混合的. 显然,只含有奇数阶导数项或只含有偶数阶导数项的非线性方程是属于类型Ⅰ的.

2. Jacobi 椭圆函数展开法

在文献[13]中,刘等提出了 Jacobi 椭圆函数展开法. 假设方程(3)的行波解 $u(\xi)$ 可以展开为下列 Jacobi 椭圆正弦函数 $\mathrm{sn}(\xi)$ 的级数(Jacobi 椭圆正弦展开法)

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{sn}^j \xi. \tag{6}$$

它的最高阶数为

$$O(u(\xi)) = n. \tag{7}$$

因为

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998030600)和上海市曙光计划项目资助的课题.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{sn}^{j-1}\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\tag{8}$$

其中 $\mathrm{cn}\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$ 分别为 Jacobi 椭圆余弦函数和第三种 Jacobi 椭圆函数，且

$$\mathrm{cn}^2\xi=1-\mathrm{sn}^2\xi,\ \mathrm{dn}^2\xi=1-m^2\mathrm{sn}^2\xi,\tag{9}$$

$m(0<m<1)$为模数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{sn}\xi=\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{cn}\xi=-\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{dn}\xi=-m^2\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi.\tag{10}$$

由(8)式，可以认为 $\mathrm{d}u^p/\mathrm{d}\xi^p$ 的最高阶数为

$$O\left(\frac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p}\right)=n+p,\ p=1,2,3,\cdots.\tag{11}$$

类似地，有

$$O\left(u^q\frac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p}\right)=(q+1)n+p,$$

$$q=0,1,2,\cdots,\ p=1,2,3,\cdots.\tag{12}$$

在(6)式中选择 n，使得非线性发展方程(1)中的非线性项和线性最高阶导数项的阶数相平衡. 但应当指出的是，当 $m\to1$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$，(6)式就退化为

$$u(\xi)=\sum_{j=0}^{n}a_j\tanh^j\xi.\tag{13}$$

这正是双曲正切展开法.

实际上，(6)式中的 Jacobi 椭圆正弦函数 $\mathrm{sn}\xi$ 可以分别用 Jacobi 椭圆余弦函数 $\mathrm{cn}\xi$ 和第三类 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{dn}\xi$ 来替换(分别称为 Jacobi 椭圆余弦展开法和第三类 Jacobi 椭圆函数展开法)，只不过相应的(8)，(9)，(10)式要做相应地调整，但要注意当 $m\to1$ 时，$\mathrm{cn}\xi$(或 $\mathrm{dn}\xi$)$\to\mathrm{sech}\xi$，同时要注意使用不同的 Jacobi 椭圆函数展开会得到不同的周期解，这也是文献[14]给出的结论. 但是文献[13]指出此种方法适应于求解只含有偶数阶导数项的非线性发展方程或只含有奇数阶导数项的方程，实际上这种方法的使用范围可以推广为：只要方程是'秩'同类的，即属于类型Ⅰ，就可用 Jacobi 椭圆函数展开法进行求解. 对于'秩'异类的方程，一般不具有 Jacobi 椭圆正弦函数展开形式的解，但有可能具有双曲正切函数展开形式的解. 这样，对奇数阶导数项和偶数阶导数项同时存在的方程，只要它们的各项的'秩'是同类的，也可能具有 Jacobi 椭圆函数展开形式的解.

3. Jacobi 椭圆函数展开法的新应用

例 1　考虑对称长波方程[16]

$$u_{tt}+pu_{xx}+2qu_tu_x+2quu_{xt}+ru_{xxtt}=0,\tag{14}$$

将(2)式代入到(14)式，得到

$$(c^2+p)u''-2qcuu''-2qc(u')^2+rc^2k^2u^{(4)}=0.\tag{15}$$

显然，(15)式即含有偶数阶导数项，也含有奇数阶导数项，但各项的'秩'分别为 2，2，2，4 均为偶数，它是'秩'同类的. 于是，将(6)式代入(15)式使其中的非线性项和最高阶导数项平衡，可得

$$n=2.\tag{16}$$

因而，方程(14)有下列形式的周期解：

$$u=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+a_2\mathrm{sn}^2\xi.\tag{17}$$

将(17)式代入到(15)式并利用(9)及(10)式，可得

$$\begin{aligned}&(-20qca_2{}^2m^2+120m^4rc^2k^2a_2)(\mathrm{sn}(\xi))^6\\&+(24rc^2k^2a_1m^4-24qca_1a_2m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^5\\&+(-120m^4rc^2k^2a_2-12qca_2a_0m^2+16qca_2{}^2\\&+6c^2a_2m^2+16qca_2{}^2m^2+6pa_2m^2\\&-120rc^2k^2a_2m^2-6qca_1{}^2m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^4\\&+(18qca_1a_2m^2-20rc^2k^2a_1m^4+18qca_2a_1\\&+2c^2a_1m^2+2pa_1m^2-20rc^2k^2a_1m^2\\&-4qca_1a_0m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^3+(104rc^2k^2a_2m^2\\&-4c^2a_2+4qca_1{}^2+8qca_2a_0+4qca_1{}^2m^2\\&-4pa_2-4c^2a_2m^2+16rc^2k^2a_2+8qca_2a_0m^2\\&-4pa_2m^2-12qca_2{}^2+16m^4rc^2k^2a_2)(\mathrm{sn}(\xi))^2\\&+(rc^2k^2a_1-c^2a_1+2qca_1a_0-pa_1m^2-pa_1\\&+2qca_1a_0m^2-c^2a_1m^2+14rc^2k^2a_1m^2\\&-12qca_2a_1+rc^2k^2a_1m^4)\mathrm{sn}(\xi)+2pa_2\\&+2c^2a_2-8rc^2k^2a_2-2qca_1{}^2\\&-4qca_2a_0-8rc^2k^2a_2m^2=0,\end{aligned}\tag{18}$$

由此定得

$$\left\{a_2=6\frac{m^2ck^2r}{q},\ a_0=-1/2\frac{-p-c^2+4rc^2k^2+4rc^2k^2m^2}{qc},\ a_1=0\right\},\tag{19}$$

代入(17)式，最后求得

$$u=-\frac{1}{2}\frac{-p-c^2+4rc^2k^2+4rc^2k^2m^2}{qc}+6\frac{m^2ck^2r}{q}\mathrm{sn}^2(\xi).\tag{20}$$

这就是对称长波方程的准确周期解. 同理可获得椭圆余弦展开和第三类椭圆函数展开形式的解. 取 m

$\to 1$，$\mathrm{sn}(\xi)\to\tanh(\xi)$，上式就退化为

$$u=\frac{1}{2}\frac{p+c^2-8rc^2k^2}{qc}+6\frac{ck^2r}{q}\tanh^2(\xi), \tag{21}$$

这就是方程(14)的孤立波.

例 2 二阶 Benjamin Ono 方程[17]

$$u_{tt}+2pu_x^2+2puu_{xx}+qu_{xxxx}=0, \tag{22}$$

将(2)式代入到(22)式，得到

$$c^2u''+2p(u')^2+2puu''+qk^2u^{(4)}=0. \tag{23}$$

显然，(23)式既含有偶数阶导数项(u''，$u^{(4)}$)又含有奇数阶导数(u')，但是各项的'秩'分别为2，2，2，4，全为偶数的情形. 于是，将(6)式代入(23)式使其中的非线性项和最高阶导数项平衡，可得

$$n=2. \tag{24}$$

因而，方程(23)也具有(17)式形式的周期解. 将(17)式代入到(23)式并利用(9)及(10)式，可得

$$\begin{aligned}&(20pa_2{}^2m^2+120m^4qk^2a_2)(\mathrm{sn}(\xi))^6\\&+(24pa_1a_2m^2+24qk^2a_1m^4)(\mathrm{sn}(\xi))^5\\&+(6c^2a_2m^2-120m^4qk^2a_2+6pa_1{}^2m^2\\&-16pa_2{}^2-16pa_2{}^2m^2+12pa_2a_0m^2\\&-120qk^2a_2m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^4+(4pa_1a_0m^2\\&+2c^2a_1m^2-20qk^2a_1m^2-20qk^2a_1m^4\\&-18pa_1a_2-18pa_1a_2m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^3\\&+(16m^4qk^2a_2-4pa_1{}^2-8pa_2a_0\\&-8pa_2a_0m^2-4c^2a_2m^2-4c^2a_2\\&+16qk^2a_2-4pa_1{}^2m^2+104qk^2a_2m^2\\&+12pa_2{}^2)(\mathrm{sn}(\xi))^2+(-c^2a_1\\&+14qk^2a_1m^2+12pa_1a_2+qk^2a_1\\&-2pa_1a_0-c^2a_1m^2+qk^2a_1m^4\\&-2pa_1a_0m^2)\mathrm{sn}(\xi)+4pa_2a_0\\&+2pa_1{}^2-8qk^2a_2m^2-8qk^2a_2\\&+2c^2a_2=0,\end{aligned} \tag{25}$$

由此定得

$$\left\{a_2=-6\frac{qk^2m^2}{p},\ a_1=0,\ a_0=\frac{1}{2}\frac{4qk^2m^2+4qk^2-c^2}{p}\right\}, \tag{26}$$

代入(17)式，最后求得

$$u=\frac{1}{2}\frac{4qk^2m^2+4qk^2-c^2}{p}-6\frac{qk^2m^2}{p}\mathrm{sn}^2(\xi). \tag{27}$$

这就是二阶 Benjamin Ono 方程的准确周期解. 同理可获得椭圆余弦展开和第三类椭圆函数展开形式的解.

取 $m\to 1$，$\mathrm{sn}(\xi)\to\tanh(\xi)$，上式就退化为

$$u=\frac{1}{2}\frac{8qk^2-c^2}{p}-6\frac{qk^2}{p}\tanh^2(\xi). \tag{28}$$

这就是二阶 Benjamin Ono 方程的准确孤立波解.

例 3 考虑 KK 方程[18]

$$u_t-u_{5x}-25u_xu_{xx}-10uu_{xxx}-20u^2u_x=0, \tag{29}$$

将(2)式代入到(29)式，得到

$$-cu'+k^4u^{(5)}+25k^2u'u''+10k^2uu'''+20u^2u'=0. \tag{30}$$

显然，(30)式中既有奇数阶导数，又有偶数阶导数，但各项的'秩'分别为1，5，3，3，1，全为奇数，于是也可用 Jacobi 椭圆正弦函数展开法求其周期解. 将(6)式代入(30)式使其中的非线性项和最高阶导数项平衡，可得

$$n=2. \tag{31}$$

因而，方程(30)也具有如(17)式的周期解. 将(17)式代入到(30)式并利用(9)及(10)式，可得

$$\begin{aligned}&(k(40a_2{}^3+720k^4a_2m^4+540k^2a_2{}^2m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^5\\&+k(120k^4a_1m^4+550k^2a_1a_2m^2+100a_1a_2{}^2)\\&\times(\mathrm{sn}(\xi))^4+k(80a_1{}^2a_2+240k^2a_2a_0m^2\\&-480k^4a_2m^2+80a_2{}^2a_0-280k^2a_2{}^2m^2\\&-480k^4a_2m^4+110k^2a_1{}^2m^2-280k^2a_2{}^2)\\&\times(\mathrm{sn}(\xi))^3+k(-240k^2a_1a_2m^2+20a_1{}^3\\&-60k^4a_1m^2-240k^2a_2a_1+120a_1a_2a_0\\&-60k^4a_1m^4+60k^2a_1a_0m^2)(\mathrm{sn}(\xi))^2\\&+k(208k^4a_2m^2-80k^2a_2a_0+32k^4a_2\\&-35k^2a_1{}^2-80k^2a_2a_0m^2+100k^2a_2{}^2\\&+32k^4a_2m^4+2ca_2+40a_1{}^2a_0+40a_2a_0{}^2\\&-35k^2a_1{}^2m^2)\mathrm{sn}(\xi)+k(k^4a_1+ca_1\\&+k^4a_1m^4-10k^2a_1a_0+14k^4a_1m^2\\&-10k^2a_1a_0m^2+50k^2a_2a_1\\&+20a_1a_0{}^2))\mathrm{cn}(\xi)\mathrm{dn}(\xi)=0,\end{aligned} \tag{32}$$

由此定得

$$a_1=0,a_0=\mp\frac{\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}\,(1+m^2)}{-2m^2+2m^4+2},$$

$$a_2=\pm 3\frac{\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}\,m^2}{-2m^2+2m^4+2},$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{\mp(-m^2+m^4+1)\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}}}{-m^2+m^4+1} \tag{33}$$

以及

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = \pm 3\frac{\sqrt{11}\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}\,m^2}{-11m^2+11m^4+11},$$

$$a_0 = \mp\frac{\sqrt{11}\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}\,(1+m^2)}{-11m^2+11m^4+11},$$

$$k = -\frac{11^{3/4}\sqrt{\mp(-m^2+m^4+1)\sqrt{-(-m^2+m^4+1)c}}}{-22m^2+22m^4+22}. \tag{34}$$

从而将(33)式和(34)式分别代入(17)式可以获得 KK 方程的新的周期解．当然，当 $m\to1$ 时，可得到对应的孤立波解．

4．结　　论

本文利用‘秩’的概念对 Jacobi 椭圆函数展开法的适用方程的类型进行了推广，并得出结论：只要非线性发展方程各项的‘秩’为同种类型的，即各项的‘秩’的取值全为偶数或全为奇数，则可以使用 Jacobi 椭圆函数展开法研究其 Jacobi 椭圆函数级数形式的周期解．

[1] Li Z B *et al* 1997 *Acta Math*. *Sci*. **17** 81(in Chinese)[李志斌等 1997 数学物理学报 **17** 81]

[2] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2062(in Chinese)[李志斌等 2001 物理学报 **50** 2062]

[3] Zhang G X *et al* 2000 *Chin*. *Sci*.(Ser. A) **30** 1103(in Chinese)[张桂戌等 2000 中国科学(A 辑) **30** 1103]

[4] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[5] Wang M L 1996 *Phys*. *Lett*. A **213** 279

[6] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵等 1998 物理学报 **47** 353]

[7] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 946(in Chinese)[徐桂琼等 2002 物理学报 **51** 946]

[8] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1424 (in Chinese)[徐桂琼等 2002 物理学报 **51** 1424]

[9] Porubov A V 1996 *Phys*. *Lett*. A **221** 391

[10] Porubov A V *et al* 1999 *J*. *Math*. *Phys*. **40** 884

[11] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068(in Chinese)[刘式适等 2001 物理学报 **50** 2068]

[12] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10(in Chinese)[刘式适等 2002 物理学报 **51** 10]

[13] Liu S K *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[14] Liu S K *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **290** 72

[15] Feng X 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 207

[16] Seyler C E 1984 *Phys*. *Fluids* **27** 4

[17] Korpel A 1984 *Proc*. *IEEE* **72** 1109

[18] Han P and Lou S Y 1993 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **10** 257

A new application of Jacobi elliptic function expansion method*

Zhang Shan-Qing Li Zhi-Bin
(*Department of Computer Science*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062, *China*)
(Received 16 July 2002; revised manuscript received 30 August 2002)

Abstract

Nonlinear evolution equations are classified by introducing a concept of "rank". A new application of the Jacobi elliptic function expansion method is given, and some exact periodic solutions of a new kind of nonlinear evolution equations are obtained.

Keywords: nonlinear evolution equation, periodic solution, solitary wave solution, Jacobi elliptic function
PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China (Grant No. G1998030600), and the "Shu-Guang" Project of Shanghai, China.