

# 基于相空间邻域的混沌时间序列自适应预测滤波器 ( I )线性自适应滤波 \*

甘建超<sup>1,2)</sup> 肖先赐<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 电子科技大学电子工程学院, 成都 610054)

<sup>2)</sup> 电子对抗国防科技重点实验室, 成都 610036)

(2002 年 8 月 7 日收到 2002 年 9 月 28 日收到修改稿)

提出了一种基于相空间邻域的线性自适应滤波算法, 将时间域变换到高维重构矢量空间, 使得不可能实现的线性预测变成了可能。实验结果表明, 这种基于相空间邻域的线性自适应预测滤波器能够有效预测一些混沌序列, 能够检测到一些混沌载波中的信号, 具有去混沌噪声的能力。

关键词: 混沌时间序列, 重构矢量, 自适应预测

PACC : 0545

## 1. 引言

混沌时间序列是由非线性机制确定的, 具有短期可预测性, 但是用传统的线性预测模型去逼近非线性机制必定导致预测的失败是无庸置疑的。现代预测理论都是采用非线性预测模型, 文献[1—11]中提出了许多非线性的预测方法, 有非参数方法、神经网络方法、基于 Volterra 级数的自适应方法等。是否采用线性预测方式就没有前途呢?

在信号处理理论中, 将时域里的信号通过 Fourier 变换或小波变换映射到频域里, 这给研究信号带来了许多方便。它给我们一种启示, 是否也可将混沌时间序列变换到另外一个领域就可以进行线性预测呢? 答案是可以的。1980 年, Packard 等人<sup>[12]</sup>提出了重构相空间的思想, 这种思想就是将时间域变换到高维矢量空间。在这高维矢量空间里, 混沌时间序列的动力学特性可以得到准确的描述。本文根据这种思想提出了一种基于混沌时间序列相空间邻域的线性自适应预测模型, 它不同于文献[2—11, 13—18]中利用混沌序列时间演化顺序中的前几点, 而是利用了某点在重构相空间中的邻近排序点, 因而采用线性滤波器就可以实现预测, 而且预测滤波器的阶数约等于嵌入维数  $m$ 。由于重构相空间和寻找邻

近点本质上是一种非线性运算, 所以该算法与传统的线性预测器有本质区别。仿真表明, 这种算法是可行的。

## 2. 混沌时间序列的重构线性模型和自适应算法

假设观测的混沌时间序列为  $\{x(t), t = 1, 2, \dots, N\}$ , 该序列的动力学方程为

$$x(t+T) = F(x(t)), \quad (1)$$

其中  $T$  为时间步长, 表示前向预测第  $T$  步。于是, 预测的本质是根据  $x(t)$  找到某个接近  $F$  的模型  $F'$  来确定将来的值  $x(t+T)$ , 即

$$x(t+T) = F'(x(t)) + e(t), \quad (2)$$

其中  $e(t)$  为误差或噪声。由于混沌时间序列的动力学机制  $F$  是非线性的, 因此采用传统的线性预测模型无法准确反映非线性映射  $F$ , 几乎无一例外地导致预测的失败。失败的原因是, 在时域上采用线性模型去逼近非线性模型。如果换一个角度观察, 将时域上的时间序列变成另外某个领域, 就可以用该领域的线性模型来替换时域上的线性模型。

由现代动力学理论可知, 混沌时间序列可以根据 Takens 定理进行相空间重构, 重构后的轨迹空间不同于原来的一维时间空间, 它是由状态矢量  $X$  构

\* 国防预研基金(批准号 51435050101DZ0203)资助的课题。

成的多维空间.不妨假设重构空间的线性预测模型为  $\Psi$ , 则重构后的线性预测模型为

$$X(t+T) = \Psi(X(t)) + \epsilon(t). \quad (3)$$

假设重构混沌时间序列的嵌入维数是  $m$ , 线性预测滤波器的阶数是  $P$ ,  $x_p(n)$  表示  $x(n)$  的预测值,  $x_{nr}(n)$  ( $n=1, 2, \dots, P$ ) 表示  $x(n)$  的重排元素. 混沌时间序列  $\{x(t), t=1, 2, \dots, N\}$  的重构方式主要

有以下两种:

1. 后向重构 构造嵌入空间中时间观测序列的向量长度为  $m$  ( $m$  是嵌入维数), 即

$$\begin{cases} X_i = [x(i), x(i+\tau\Delta t), \dots, x(i+(m-1)\tau\Delta t)]^T, \\ i = 1, 2, \dots, K, K = N - (m-1)\tau\Delta t, \end{cases} \quad (4)$$

则重构  $N$  点序列后的轨迹为

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_K] = \begin{bmatrix} x(1) & \dots & x(K) \\ x(1+\tau\Delta t) & \dots & x(K+\tau\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x(1+(m-1)\tau\Delta t) & x(2+(m-1)\tau\Delta t) & \dots & x(K+(m-1)\tau\Delta t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

2. 前向重构 构造嵌入空间中时间观测序列的向量长度为  $m$ , 即

$$\begin{cases} X_i = [x(i), x(i-\tau\Delta t), \dots, 0]^T, \\ i = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (6)$$

和

$$\begin{cases} X_i = [x(i), x(i-\tau\Delta t), \dots, x(i-(m-1)\tau\Delta t)]^T, \\ i = m, m+1, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

则重构  $N$  点序列后的轨迹为

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_N] = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(N) \\ 0 & x(2-\tau\Delta t) & \dots & x(N-\tau\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x(N-(m-1)\tau\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中  $\tau$  为时间延迟参数,  $\Delta t$  为采样时间间隔,  $t_0$  为初始时间.

因混沌时间序列具有短期可预测性, 在连续性的假定条件下(混沌时间序列可以当作某个连续函数的离散点列)某点在将来的值可以由相空间中该点邻域内最近的几个点来近似逼近, 这些点称为该点的重排元素. 怎样找重排元素呢? 不妨假设线性预测滤波器的阶数是  $P$ , 则可用下面方法找  $P$  个重排元素.

首先, 根据上面的重构轨迹, 设第  $n$  点的重构矢量为  $X_n$ , 计算它与前面  $n-1$  个重构矢量  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) 的距离,

$$d(i) = \|X(i) - X(n)\|_p, p = 1, 2, \dots, \infty, \quad (9)$$

其中的  $p = 1, 2, \dots, \infty$  分别表示求 1 范数, 2 范数,  $\dots, \infty$  范数, 本文取  $p=2$ . 然后按照升幂次序求出最小的  $P$  个距离, 将对应项依次提取出来, 作为第  $n$  点的重排矢量  $X_{nr}$ . 显然, 前向重构元素共有  $N$  个重排矢量,  $N \times P$  个新重排元素, 每个重排矢量有  $P$  个新重排元素  $x_{nr}(i_j) = d(i_j+1)$ . 重排矢量  $X_n$  可以表示为

$$X_{nr} = [x_{nr}(i_1) \ x_{nr}(i_2) \ \dots \ x_{nr}(i_p)]^T. \quad (10)$$

后向重构元素共有  $K$  个重排矢量,  $K \times P$  个新的重排元素, 每个重排矢量也有  $P$  个新重排元素  $x_{nr}(i) = d(i)$ , 其中  $i = 1, \dots, P$ , 满足(9)式的  $P$  个序号. 重排矢量  $X_n$  也用(10)式表示.

其次, 根据第  $n$  点的重排矢量的  $P$  个新的重排元素, 线性预测为

$$x_p(n) = \sum_{k=1}^P \omega_{kp}(n) x_{nr}(k), \quad (11)$$

其中  $\omega_{kp}(n)$  为第  $n$  点重排元素  $x_{nr}(k)$  的权系数. 根据前面两种重构方式,  $P, m$  与重排元素的关系主要有以下三种:

1) 对于后向重构, 取  $P=m$ , 则重排元素为第  $n$  点距离最近的  $m$  个元素;

2) 对于前向重构, 取  $P=m$ , 则重排元素为第  $n$  点距离最近的  $m$  个元素;

3) 对于前向重构, 取  $P=m-1$ , 则重排元素为第  $n$  点距离最近的  $m-1$  个元素.

于是, 线性自适应预测的估计误差表达式为

$$\begin{aligned} \epsilon(n) &= x(n) - x_p(n) = x(n) \\ &\quad - \sum_{k=1}^P \omega_{kp}(n) x_{nr}(k). \end{aligned} \quad (12)$$

根据维纳滤波的正交原理,可得线性自适应预测的递推表达式.

对于1)种情况,递推公式为

$$\begin{cases} \omega_{km}(n) = \omega_{km}(n-1) + 2\mu e(n-1)x_{n-1,r}(k), \\ x_m(n) = \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)x_{n-1,r}(k), \\ k = 1, 2, \dots, m; \end{cases} \quad (13)$$

对于2)种情况,所有式子修正为

$$\begin{cases} e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)x_{n-1,r}(k), \\ \omega_{km}(n) = \omega_{km}(n-1) + 2\mu e(n-1)x_{n-1,r}(k), \\ x_m(n) = \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)x_{n-1,r}(k), \\ k = 1, 2, \dots, m; \end{cases} \quad (14)$$

对于3)种情况,所有式子修正为

$$\begin{cases} e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{m-1} \omega_{k(m-1)}(n)x_{n-1,r}(k), \\ \omega_{k(m-1)}(n) = \omega_{k(m-1)}(n-1) \\ \quad + 2\mu e(n-1)x_{n-1,r}(k), \\ x_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} \omega_{k(m-1)}(n)x_{n-1,r}(k), \\ k = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (15)$$

其中1)种情形利用了将来信息,而2),3)只利用了过去信息,重排元素为前者相应滞后一位的项;在2)和3)两种情形中,3)的预测滤波器的阶数比前者少一阶. $\mu$ 为控制算法收敛系数.

混沌时间序列虽然具有短期可预测性,但是其对初始值的敏感性,导致了对其邻近点不能选得过多,而且根据上面的分析,邻近点选得过多意味着滤波器阶数多,会使运算时间过长,因此可以将嵌入维数选得小一些,本文均取3维,这可以减少运算量.

### 3. 重构线性自适应预测滤波器的实验仿真结果和分析

为了验证重构线性自适应预测滤波器的有效性,在计算机仿真中采用如下的三种混沌.

logistic混沌映射

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n)); \quad (16)$$

Henon混沌映射

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x^2(n), \\ y(n+1) = 0.3x(n); \end{cases} \quad (17)$$

Lorenz混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x + y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma = 10, r = 28, b = 8/3.$$

在下面的分析中,延迟 $\tau = 1$ ,采样时间间隔 $\Delta t = 1$ .对于多变量的混沌,均取 $x$ 分量来进行预测,并且对Henon混沌映射和Lorenz混沌系统首先利用

$$x_u(n) = [x(n) - \min_n\{x(n)\}]$$

$$[\max_n\{x(n)\} - \min_n\{x(n)\}] \quad (19)$$

将其归一化到[0,1]区间.记数据样本点为2000,训练样本点为1800,预测集为最后200点,将真实值 $x(n)$ 介于预测值区间 $[x_p(n) - 5\% x_p(n), x_p(n) + 5\% x_p(n)]$ 的预测当作有效预测.其中Lorenz混沌系统的时间序列是采用5阶龙格-库塔算法采样得到的.

#### 3.1. 采用1)种方式利用(13)式的预测结果

图1(a)表示logistic混沌映射的真实曲线(实线)与预测曲线(虚线)的关系,图1(b)表示logistic混沌映射的误差平方随时间变化的关系.从图1可以看出,在大约1300步以后,预测基本上接近真实结果.

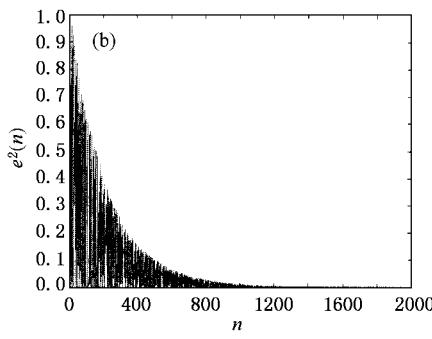
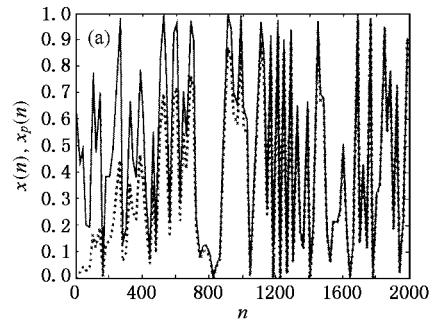


图1 logistic混沌映射的预测结果

图2(a)表示Henon混沌映射的真实曲线(实线)与预测曲线(虚线)的关系,图2(b)表示Henon混沌映

射的误差平方随时间变化的关系。从图 2 可以看出，在大于 1100 步，预测基本上接近真实结果。

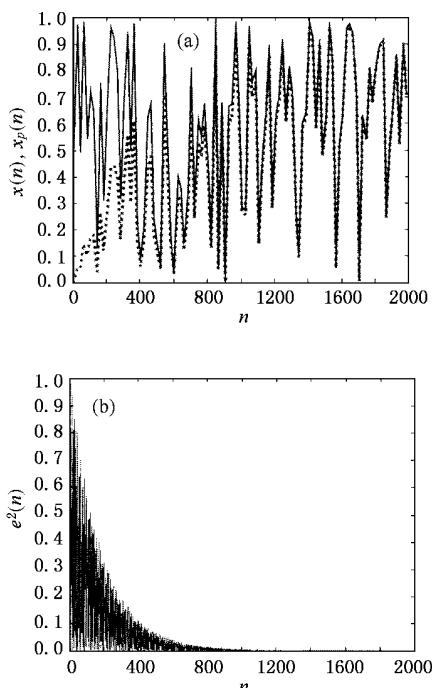


图 2 Hénon 混沌映射的预测结果

图 3(a)表示 Lorenz 混沌系统的真实曲线( 实线 )与预测曲线( 虚线 )的关系 ,图 3(b)表示 Lorenz 混沌系统的误差平方随时间变化的关系 . 从图 3 可以看出 ,在大于 800 步 ,预测基本上接近真实结果 .

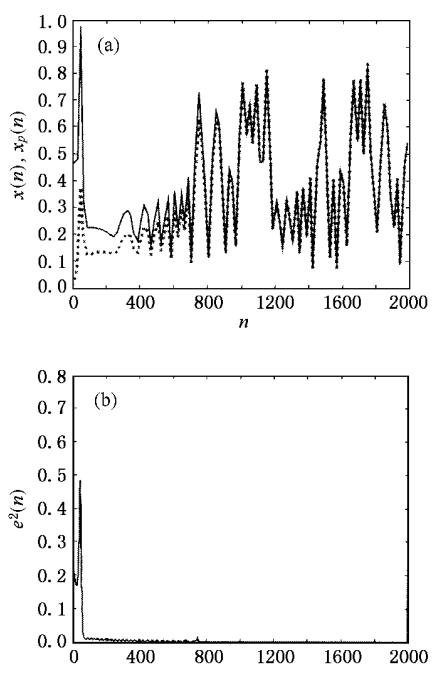


图 3 Lorenz 混沌系统的预测结果

为了从量上反映 1 )种情形的预测结果 ,表 1 统计了三种混沌序列的各种参数和预测结果 .

表 1 三种混沌序列在 1 )种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数 $n$	收敛系数 $\mu$	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	3	0.001	98.5000	0.0046
Hénon 混沌映射	3	0.001	98.5000	0.0031
Lorenz 混沌系统	3	0.005	98.5000	0.0024

表 1 说明 ,采用 1 )种情形的线性自适应预测滤波 ,在较小的嵌入维数和适当的收敛系数情况下 ,其有效预测率很高 ,而且误差均方根较小 ,具有良好的有效性 .

### 3.2. 采用 2 )或 3 )种方式利用( 14 )式或( 15 )式的预测结果

鉴于篇幅原因 ,将三种混沌序列的预测曲线略去 ,只将 2 )种情形各种参数和预测结果列于表 2 ,将 3 )种情形各种参数和预测结果列于表 3 .

表 2 三种混沌序列在 2 )种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数 $n$	收敛系数 $\mu$	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	$\exists (P=3)$	0.01	88	0.0054
Hénon 混沌映射	$\exists (P=3)$	0.001	92	0.0031
Lorenz 混沌系统	$\exists (P=3)$	0.005	92.5000	0.0073

表 3 三种混沌序列在 3 )种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数 $n$	收敛系数 $\mu$	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	$\exists (P=2)$	0.01	88.5000	0.0066
Hénon 混沌映射	$\exists (P=2)$	0.005	96	0.0077
Lorenz 混沌系统	$\exists (P=2)$	0.005	93	0.0075

表 2 和表 3 说明 ,采用 2 )种或 3 )种方式的线性自适应预测滤波 ,在较小的嵌入维数和适当的收敛系数情况下 ,其有效预测率也很高 ,而且误差均方根较小 ,也具有良好的有效性 .

### 3.3. 三种情形的预测性能比较

为了比较三种情形的预测性能 ,下面对每个混沌序列分别采用统一的嵌入维数、收敛系数 表 4 列出了各个混沌序列在各种情形的预测结果 .

由表 4 看出 ,在三种方法都能预测的前提下 ,如果参数是相同的 则同种混沌时间序列的第 1 )种情形的预测有效性明显好于 2 ),3 )两种情形 . 这是因为前者利用了将来信息 ,而后者只是利用了过去信

息,因此后者的预测有效性次于前者在理论上是可以理解的.

表 4 三种混沌序列分别在各种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数 $n$	收敛系数 $\mu$	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	2 ) $(P = 3)$	0.01	98	$3.3967 \times 10^{-4}$
	3 ) $(P = 3)$	0.01	88	0.0054
	3 ) $(P = 2)$	0.01	88.5000	0.0066
	1 ) $(P = 3)$	0.005	98.5000	0.0026
Henon 混沌映射	2 ) $(P = 3)$	0.005	96.5000	0.0083
	3 ) $(P = 2)$	0.005	96	0.0077
	1 ) $(P = 3)$	0.005	98.5000	0.0024
Lorenz 混沌系统	2 ) $(P = 3)$	0.005	92.5000	0.0073
	3 ) $(P = 2)$	0.005	93	0.0075

由表 4 可以看出,在使用前向重构进行前向预测的 2)、3) 两种情形,二者的预测有效性大致相同.这是因为二者都只利用了过去时刻的最接近的两三个点,只相差一个点,这两三个点均有可能出现在混沌序列开始分岔前后,所以不同情形可能出现不同的细微差异.但是,第 3) 种情况比第 2) 种情况的预测滤波器阶数少一阶,因而前者比后者的运算量要少.

## 4. 应 用

在混沌保密通信中,常常利用混沌序列对初始值的敏感性来调制保密通信,将混沌系统产生的混沌序列作为载波,而有用信号加在混沌载波里.运用本文的算法可以将混沌载波中的信息提取出来,其主要方法是对混沌信号进行预测,将预测误差作为检测有用信号的平台.如果没有信号,则稳定后的预测误差几乎为 0.如果有信号,则稳定后的预测误差会出现波动.根据预测稳定后是否有预测误差的波动就可以检测混沌保密通信中的信息.下面模拟了 logistic 混沌映射作载波的正弦信号,见图 4(a),信号与混沌载波的比值约为 -25dB.采用第 1) 种线性自适应滤波方式进行滤波,其预测滤波结果见图 4(b).

从图 4(b) 可以看出,开始阶段误差比较大,这是权系数还没有收敛的结果,但经过大约 200 步以后,误差几乎为 0,说明预测已经进入稳定状态.在

大约 1000 至 1200 步,出现了剧烈变化,变化的波形正是一个与原来信号相似的正弦波,在此之后又重新恢复了稳定状态,这说明在约 1000 至 1200 步有信号出现,与实际正弦信号的出现时间是吻合的.这证明了根据前面的算法可以检测出淹没在混沌信号中的有用信息.

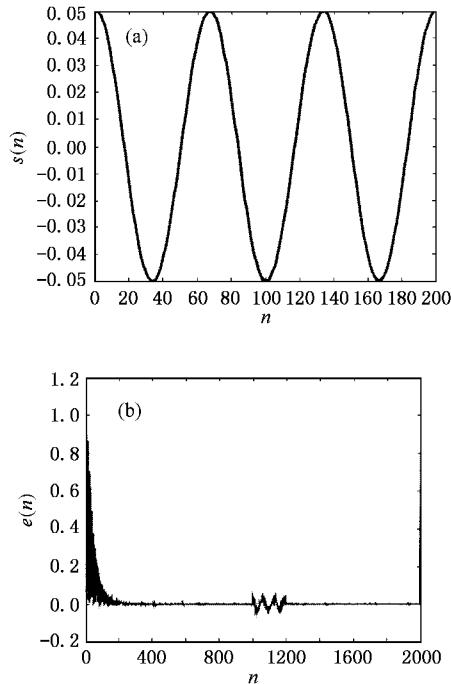


图 4 检测淹没在混沌信号中的正弦脉冲

## 5. 结 论

本文根据现代非线性动力学理论和维纳滤波原理,将时间域变换到高维重构矢量空间,使不可能实现的线性预测变成了可能.实验结果表明(1)这种基于相空间的线性自适应预测滤波器能够有效预测一些混沌序列;(2)这种基于邻域的线性自适应预测滤波器能够检测到一些淹没在混沌载波中的信号;(3)这种重构线性自适应预测滤波器具有某种程度上的去混沌噪声的能力.

这种算法虽然是线性预测滤波器,但由于涉及到寻找邻近排序点这种非线性运算,其本质上还是一种非线性的预测方式,不过这种预测滤波器的阶数比较少,约等于重构相空间的嵌入维数  $m$ .

- [ 1 ] Principle J C 1997 *IEEE Signal Processing Magazine* **33** 56
- [ 2 ] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 403 ( in Chinese )  
[ 张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403 ]
- [ 3 ] Yuan J and Xiao X C 1998 *Acta Phys . Sin .* **47** 897 ( in Chinese )  
[ 袁 坚、肖先赐 1998 物理学报 **47** 897 ]
- [ 4 ] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin . Phys .* **9** 408
- [ 5 ] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chinese Physics Letters* **17** ( 2 ) 88
- [ 6 ] Guo S B and Xiao X C 2000 *Proc . IEEE WICIA '2000* **2** 1051
- [ 7 ] Frank W A 1994 *Proc . IEEE ICASSP* **3** 517
- [ 8 ] Haykin S and Li L 1995 *IEEE Trans . Signal Processing* **43** 526
- [ 9 ] Schroer C G , Sauer T , Ott E and Yorke J A 1998 *Phys . Rev . Lett .* **80** 1410
- [ 10 ] Sidorowich J J 1992 *Proc . IEEE ICASSP* **4** 121
- [ 11 ] Sugihara G and May R M 1990 *Nature* **344** 734
- [ 12 ] Packard N H , Crutchfield J P , Farmer J D and Shaw R S 1980  
*Phys . Rev . Lett .* **45** 712
- [ 13 ] Kantz H and Schreiber T 1997 *Nonlinear Time Series Analysis* ( Cambridge : Cambridge University Press )
- [ 14 ] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 1221 ( in Chinese ) [ 张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221 ]
- [ 15 ] Yuan J 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 641 ( in Chinese ) [ 袁 坚 2000 物理学报 **49** 641 ]
- [ 16 ] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin . Phys .* **10** 97
- [ 17 ] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin . Phys .* **10** 390
- [ 18 ] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys . Sin .* **50** 1248 ( in Chinese )  
[ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 1248 ]

## Adaptive predict-filter of chaotic time series constructed Based on the neighbourhood in the reconstructed phase space ( I )linear adaptive filter<sup>\*</sup>

Gan Jian-Chao<sup>1,2)</sup> Xiao Xian-Ci<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Electronic Engineering ,University of Electronic Science and Technology of China ,Chengdu 610054 ,China )

<sup>2)</sup> National Electronic Warfare Laboratory ,Chengdu 610036 ,China )

( Received 7 August 2002 ; revised manuscript received 28 September 2002 )

### Abstract

A kind of adaptive linear predict-filter of chaotic time series by neighbourhood in the reconstructed phase space is proposed. It can convert the time domain into the multi-dimensional vector domain , and predict the chaotic time series by linear filter. The result of computer simulation illustrates that the algorithm is effective in predicting some chaotic series and identifying the signal in the chaotic wave .

**Keywords** : chaotic time series , reconstructed vector , adaptive prediction

**PACC** : 0545

\* Project supported by the National Defense Foundation of China ( Grant No. 51435050101DZ0203 ).