

基于相空间邻域的混沌时间序列自适应预测滤波器 (Ⅱ) 非线性自适应滤波^{*}

甘建超^{1,2)} 肖先赐¹⁾

¹⁾ 电子科技大学电子工程学院, 成都 610054)

²⁾ 电子对抗国防科技重点实验室, 成都 610036)

(2002 年 8 月 16 日收到 2002 年 9 月 28 日收到修改稿)

根据相空间重构理论、最小均方误差准则和最陡下降原理, 提出了一种基于相空间邻域的非线性自适应滤波算法。实验结果表明, 这种非线性自适应预测滤波器能够有效预测一些混沌序列, 在某种程度上具有抗噪声的能力。

关键词: 混沌时间序列, 重构矢量, 最小均方误差准则, 非线性自适应预测

PACC: 0545

1. 引言

本文是基于相空间邻域的自适应预测滤波器的系列篇(Ⅱ), 与系列篇(Ⅰ)的相似之处在于, 它不同于文献[1—18]中利用混沌序列时间演化顺序中的前几点, 而是利用了某点在重构相空间中^[17]的邻近点, 而且预测滤波器的阶数约等于嵌入维数 m ; 它与系列篇(Ⅰ)的不同之处在于, 后者采用的是线性预测滤波器, 而前者采用的是非线性预测滤波器。因此, 本文的形式与系列篇(Ⅰ)相似, 但是推导的公式却完全不同。另外, 由于重构相空间和寻找邻近点本质上是一种非线性运算, 因此二者在本质上是非线性局域预测方法的两种不同形式。

仿真结果表明, 这种算法是可行的, 能够有效预测一些混沌序列, 具有一定程度的抗噪声性能, 这种预测滤波器的系数也比较少, 等于嵌入维数 m 或 $m-1$ 。

为了文章结构的完整性, 本文保留了与系列篇

(Ⅰ)相似的形式, 但是内容却有本质区别。

2. 混沌时间序列的重构非线性模型和自适应算法

假设观测的混沌时间序列为 $\{x(t), t = 1, 2, \dots, N\}$, 那么该序列的动力学方程就是

$$x(t + T) = F(x(t)), \quad (1)$$

其中 T 为时间步长, 表示前向预测第 T 步。根据 Takens 定理进行相空间重构, 重构后的轨迹空间由状态矢量 X 构成。假设重构空间的非线性预测模型为 Ψ , 则非线性预测模型为

$$X(t + T) = \Psi(X(t)) + \epsilon(t). \quad (2)$$

假设重构混沌时间序列的嵌入维数是 m , 线性预测滤波器阶数是 P , $x_p(n)$ 表示 $x(n)$ 的预测值, $x_m(n)$ ($n = 1, \dots, P$) 表示 $x(n)$ 的重排元素, 重构方式主要有以下两种:

1. 后向重构轨迹为

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_K] = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(K) \\ x(1 + \tau\Delta t) & x(2 + \tau\Delta t) & \dots & x(K + \tau\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(1 + (m-1)\tau\Delta t) & x(2 + (m-1)\tau\Delta t) & \dots & x(K + (m-1)\tau\Delta t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

2. 前向重构轨迹为

* 国防预研基金(批准号 51435050101DZ0203)资助的课题。

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_N] = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(N) \\ 0 & x(2 - \tau\Delta t) & \dots & x(N - \tau\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & x(N - (m-1)\tau\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 τ 为时间延迟参数, Δt 为采样时间间隔, t_0 为初始时间, $K = N - (m-1)\tau\Delta t$.

混沌时间序列某点在将来的值可以由相空间中该点邻域内最近的几个点(重排元素)来近似逼近. 假设线性预测滤波器的阶数是 P , 则可用下面方法找最近的 P 个重排元素.

首先, 根据上面的重构轨迹, 设第 n 点的重构矢量为 X_n , 计算它与前面 $n-1$ 个重构矢量 X_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 的距离,

$$d(i) = \|X(i) - X(n)\|_p, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (5)$$

其中的 $p = 1, 2, \dots, \infty$ 分别表示求 1 范数, 2 范数, \dots, ∞ 范数, 本文取 $p = 2$. 按照升幂次序求出最小的 P 个距离, 将对应项依次提取出来, 作为第 n 点的重排矢量 X_{nr} . 显然, 前向重构元素共有 N 个重排矢量、 $N \times P$ 个重排元素, 每个重排矢量有 P 个重排元素 $x_{nr}(i_j) = d(i_j + 1)$. 重排矢量 X_n 可以取为

$$X_{nr} = [x_{nr}(i_1) \ x_{nr}(i_2) \ \dots \ x_{nr}(i_p)]^T. \quad (6)$$

后向重构元素共有 K 个重排矢量、 $K \times P$ 个重排元素, 每个重排矢量也有 P 个重排元素 $x_{nr}(i) = d(i)$, 其中 $i = 1, \dots, P$ 满足(5)式的 P 个序号. 重排矢量 X_n 也用(6)式表示.

其次, 根据第 n 点的重排矢量的 P 个重排元素, 利用(7)式进行预测.

$$x_p(n) = \sum_{k=1}^P \omega_{kp}(n)g(x_{nr}(k)), \quad (7)$$

其中 $\omega_{kp}(n)$ 为第 n 点重排元素 $x_{nr}(k)$ 的权系数. 根据前面两种重构方式, P, m 与重排元素的关系主要有以下三种:

1) 对于后向重构, 取 $P = m$, 则重排元素为第 n 点距离最近的 m 个元素;

2) 对于前向重构, 取 $P = m$, 则重排元素为第 n 点距离最近的 m 个元素;

3) 对于前向重构, 取 $P = m-1$, 则重排元素为第 n 点距离最近的 $m-1$ 个元素.

于是, 非线性自适应预测的估计误差表达式为

$$\epsilon(n) = x(n) - x_p(n) = x(n)$$

$$- \sum_{k=1}^P \omega_{kp}(n)g(x_{nr}(k)). \quad (8)$$

与维纳滤波的正交原理类似, 可以根据最小均方误差准则建立代价函数

$$\begin{aligned} \xi &= E\{e^2(n)\} = E\{x(n) - \omega g(x_{nr})\}^2 \\ &= E\{x(n) - \sum_{k=1}^P \omega_{kp}(n)g(x_{nr}(k))\}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

对上式求导并令其为 0, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \omega} &= E\{2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \omega}\} \\ &= -2E\{e(n)g(x_{nr})\} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

由此得到非线性预测滤波器的正规条件

$$E\{e(n)g(x_{nr}(k))\} = 0, k = 1, 2, \dots, P, \quad (11)$$

其中 E 表示求数学期望. 利用最陡下降原理, 经过简单推导, 可得下面三种递推表达式.

对于 1) 种情况, 递推公式为

$$\begin{cases} \omega_{km}(n) = \omega_{km}(n-1) + 2\mu e(n-1)g(x_{n-1,r}(k)), \\ x_m(n) = \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)g(x_{nr}(k)), \\ k = 1, 2, \dots, m; \end{cases} \quad (12)$$

对于 2) 种情况, 所有式子修正为

$$\begin{cases} e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)g(x_{n-1,r}(k)), \\ \omega_{km}(n) = \omega_{km}(n-1) + 2\mu e(n-1)g(x_{n-1,r}(k)), \\ x_m(n) = \sum_{k=1}^m \omega_{km}(n)g(x_{nr}(k)), \\ k = 1, 2, \dots, m; \end{cases} \quad (13)$$

对于 3) 种情况, 所有式子修正为

$$\begin{cases} e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{m-1} \omega_{km-1}(n)g(x_{n-1,r}(k)), \\ \omega_{km-1}(n) = \omega_{km-1}(n-1) + 2\mu e(n-1)g(x_{n-1,r}(k)), \\ x_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} \omega_{km-1}(n)g(x_{nr}(k)), \\ k = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (14)$$

其中 1) 种情形利用了将来信息, 而 2), 3) 只利用了

过去信息,重排元素为前者相应滞后一位的项;在2)和3)两种情形,3)的预测滤波器的阶数比前者少一阶。 μ 为控制算法收敛系数。

在本文中非线性函数 g 取值域为[0,1]的S型函数

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad (15)$$

该函数已经成功地应用于神经网络。

非线性预测滤波器的结构如图1所示。

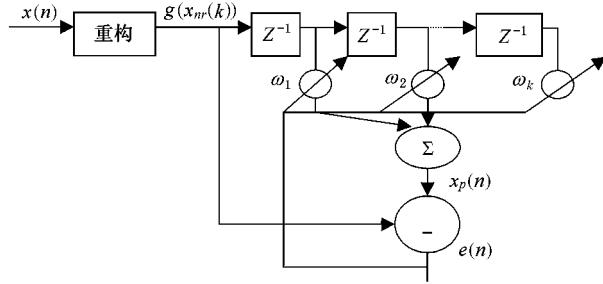


图1 非线性预测滤波器

从图1可以看出,该预测滤波器只是在传统的预测滤波器基础上多了一个过程,即寻找某点 $x(n)$ 的邻近点 $x_{nr}(i)$,再计算它们的非线性函数值 $g(x_{nr}(i))$,其中 $i=1, \dots, P$ 。

3. 重构非线性自适应预测滤波器的实验仿真结果和分析

为了验证算法的有效性,在计算机仿真中采用如下的三种混沌。

二维 logistic 混沌映射

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n)); \quad (16)$$

Henon 混沌映射

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x^2(n), \\ y(n+1) = 0.3x(n); \end{cases} \quad (17)$$

Lorenz 混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x + y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma = 10, r = 28, b = 8/3.$$

在下面的分析中,延迟 $\tau=1$,采样时间间隔 $\Delta t=1$ 。对于多变量的混沌映射,均取 x 分量来进行预测,并且对 Henon 混沌映射和 Lorenz 混沌系统首先利用

$$x_u(n) = [x(n) - \min_n\{x(n)\}]$$

$$[\max_n\{x(n)\} - \min_n\{x(n)\}] \quad (19)$$

将其归一化到[0,1]区间。记数据样本点为2000,训练样本点为1800,预测集为最后200点,将真实值 $x(n)$ 介于预测值区间 $[x_p(n) - 5\% x_p(n), x_p(n) + 5\% x_p(n)]$ 的预测当作有效预测。其中 Lorenz 混沌系统的时间序列是采用5阶龙格-库塔算法采样得到的。

3.1. 采用1)种方式利用(12)式的预测结果

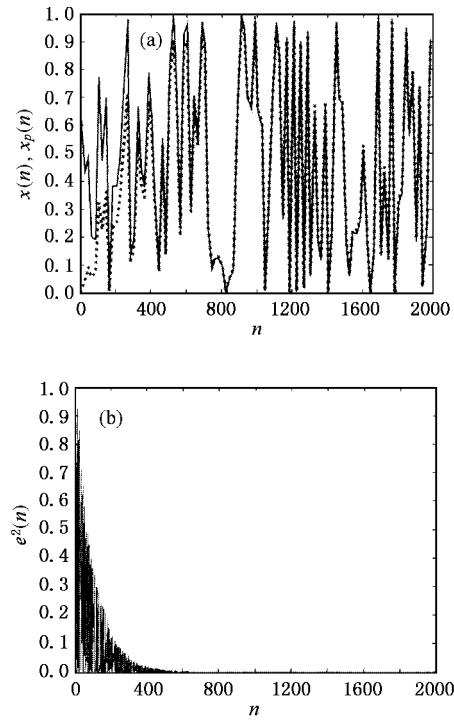


图2 logistic混沌映射的预测结果

图2(a)表示 logistic 混沌映射的真实曲线(实线)与预测曲线(虚线)的关系。图2(b)表示 logistic 混沌映射的预测误差的平方随时间变化的关系。从图2看出,小于850步,误差的平方逐渐变小,说明预测正在处于收敛的过程;在大于850步,预测接近真实结果了。

图3(a)表示 Henon 混沌映射的真实曲线(实线)与预测曲线(虚线)的关系,图3(b)表示 Henon 混沌映射的误差平方随时间变化的关系。从图3可以看出,在大于600步,自适应预测基本上接近真实结果。

图4(a)表示 Lorenz 混沌系统的真实曲线(实线)与预测曲线(虚线)的关系,图4(b)表示 Lorenz

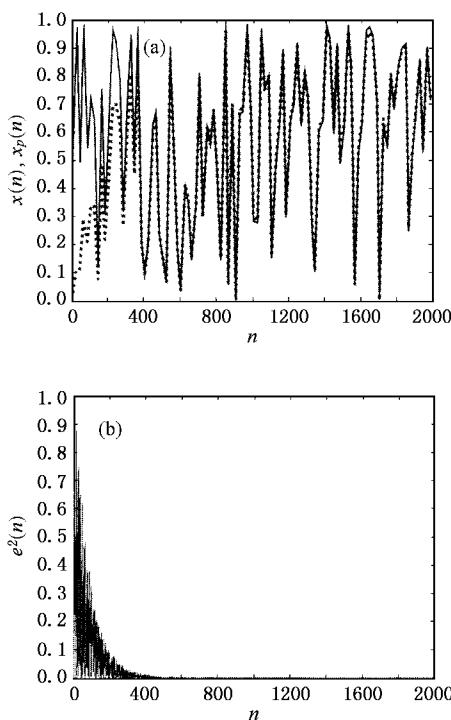


图3 Hénon 混沌映射的预测结果

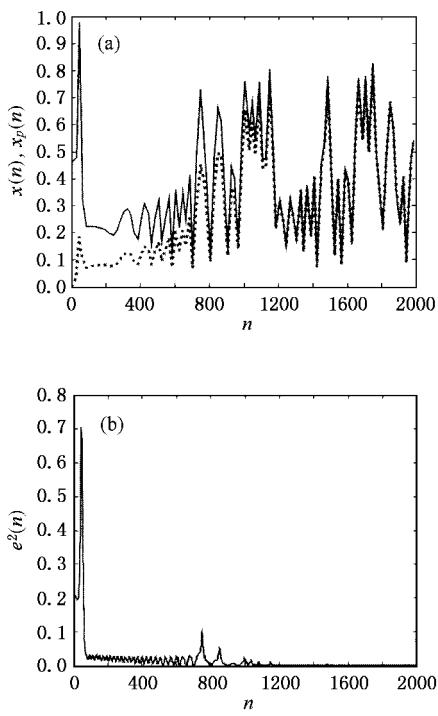


图4 Lorenz 混沌系统的预测结果

混沌系统的误差平方随时间变化的关系. 从图4可以看出, 在大于1200步, 自适应预测基本上接近真实结果.

为了从量上反映1)种情形的预测结果, 表1统计了三种混沌序列的各种参数和预测结果.

表1 三种混沌序列在1)种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数n	收敛系数 μ	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	3	0.01	71.5000	0.0119
Henon 混沌映射	3	0.01	94	0.0123
Lorenz 混沌系统	3	0.01	97	0.0091

表1说明, 采用1)种情形的自适应预测滤波, 在较小的嵌入维数和适当的收敛系数情况下, 其有效预测率很高, 而且误差均方根较小, 具有良好的有效性.

3.2. 采用2)种或3)种方式利用(13)式或(14)式的预测结果

鉴于篇幅原因, 将三种混沌序列的预测曲线略去, 只将2)种情形各种参数和预测结果列于表2, 将3)种情形各种参数和预测结果列于表3.

表2 三种混沌序列在2)种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数n	收敛系数 μ	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	$\exists P=3$	0.01	81.5000	0.0177
Henon 混沌映射	$\exists P=3$	0.01	93.5000	0.0169
Lorenz 混沌系统	$\exists P=3$	0.01	89.5000	0.0119

表3 三种混沌序列在3)种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数n	收敛系数 μ	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	$\exists P=2$	0.01	76.5000	0.0202
Henon 混沌映射	$\exists P=2$	0.01	93.5000	0.0174
Lorenz 混沌系统	$\exists P=2$	0.01	80.5000	0.0158

表3说明, 采用3)种情形的自适应预测滤波, 在较小的嵌入维数和适当的收敛系数情况下, 其有效预测率也很高, 而且误差均方根较小, 也具有良好的有效性.

3.3. 三种情形的预测性能比较

为了比较三种情形的预测性能, 下面对每个混沌序列分别采用统一的嵌入维数、收敛系数, 表4列出了各个混沌序列在各种情形的预测结果.

表4 三种混沌序列分别在各种情形的各种参数和预测结果

混沌时间序列	嵌入维数 n	收敛系数 μ	有效预测率/%	误差均方根
logistic 混沌映射	1 ($P = 3$)	0.01	71.5000	0.0119
	2 ($P = 3$)	0.01	81.5000	0.0177
	3 ($P = 2$)	0.01	76.5000	0.0202
Henon 混沌映射	1 ($P = 3$)	0.01	94	0.0123
	2 ($P = 3$)	0.01	93.5000	0.0169
	3 ($P = 2$)	0.01	93.5000	0.0174
Lorenz 混沌系统	1 ($P = 3$)	0.01	97	0.0091
	2 ($P = 3$)	0.01	89.5000	0.0119
	3 ($P = 2$)	0.01	80.5000	0.0158

由表4看出,在三种方法都能预测的前提下,如果参数是相同的,则同种混沌时间序列的第1)种情形的有效性明显好于2),3)两种情形.这是因为前者利用了将来信息,而后者只是利用了过去信息.

4. 应用举例

由于混沌系统在有噪声的环境下,可能导致混沌吸引子的崩溃,使得混沌系统失去其原来固有的特性,因此预测过程也就会变得无法进行.如果预测序列可以在一定程度上恢复原来信号的吸引子,则说明该算法模型比较接近真实系统的动力学特性,具有某种程度上的抗噪声性能.在高信噪比的情形里,将预测信号作为原来信号的逼近,将误差作为噪声.下面以归一化的Henon混沌映射叠加1%的均值为0,方差为1的高斯白噪声为例,检验本文中的算法对噪声的鲁棒性.

图5(a)表示没有噪声时Henon混沌映射的吸引子,图5(b)表示叠加噪声后Henon混沌映射的吸引子.从图5(b)看出,虽然预测重建后的吸引子有些变化,但是其大致轮廓与原来吸引子相似,这说明该算法在具有一定程度的抗噪声性能.

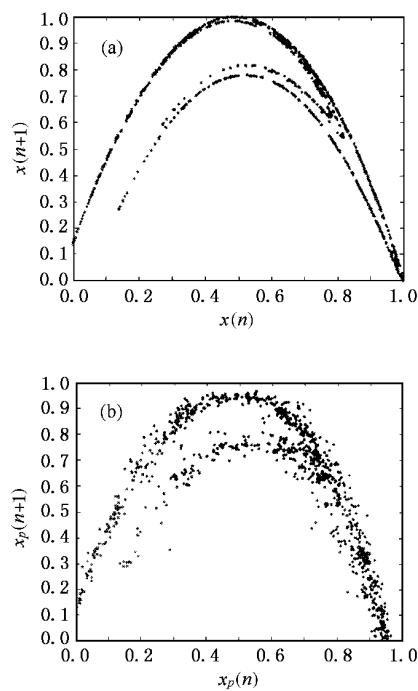


图5 Henon混沌映射的吸引子

5. 结论

本文根据现代非线性动力学理论和维纳滤波原理,将时间域变换到高维重构矢量空间,提出了一种非线性自适应预测算法.实验结果表明(1)这种非线性自适应预测滤波器能够有效预测一些混沌序列(2)利用将来信息的非线性自适应预测滤波器比利用过去信息者预测效果好(3)这种非线性自适应预测滤波器具有一定程度的抗噪声性能(4)这种非线性自适应预测滤波器的系数比较少,等于嵌入维数 m 或等于嵌入维数 $m-1$.

本文的非线性函数 $g(\cdot)$ 原则上应该取值域区间为[0,1]的函数,而这样的函数比较多,不同的函数对预测性能的影响是不同的.本文仅借用了神经网络中的S型函数.不同的函数对预测性能的影响程度有待于进一步的研究.

- [1] Principle J C 1997 *IEEE Signal Processing Magazine* **33** 56
- [2] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese)
[张家树、肖先赐 2000 物理学报 49 403]
- [3] Yuan J and Xiao X C 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 897 (in Chinese)
[袁 坚、肖先赐 1998 物理学报 47 897]

- [4] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin. Phys.* **9** 408
- [5] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 88
- [6] Guo S B and Xiao X C 2000 *Proc. IEEE WICIA '2000* **2** 1051
- [7] Frank W A 1994 *Proc. IEEE ICASSP* **3** 517
- [8] Haykin S and Li L 1995 *IEEE Trans. Signal Processing* **43** 526

- [9] Schroer C G , Sauer T , Ott E and Yorke J A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1410
- [10] Sidorowich J J 1992 *Proc. IEEE ICASSP* **4** 121
- [11] Sugihara G and May R M 1990 *Nature* **344** 734
- [12] Packard N H , Crutchfield J P , Farmer J D and Shaw R S 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 712
- [13] Kantz H and Schreiber T 1997 *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge :Cambridge University Press)
- [14] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
- [15] Yuan J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 641 (in Chinese) [袁 坚 2000 物理学报 **49** 641]
- [16] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin. Phys.* **10** 97
- [17] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin. Phys.* **10** 390
- [18] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1248 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 1248]

Adaptive predict-filter of chaotic time series constructed Based on the neighbourhood in the reconstructed phase space (Ⅱ) nonlinear adaptive filter^{*}

Gan Jian-Chao^{1,2)} Xiao Xian-Ci¹⁾

¹⁾ Department of Electronic Engineering ,University of Electronic Science and Technology of China ,Chengdu 610054 ,China)

²⁾ National Electronic Warfare Laboratory ,Chengdu 610036 ,China)

(Received 16 August 2002 ; revised manuscript received 28 September 2002)

Abstract

A kind of adaptive nonlinear predict-filter of chaotic time series using the neighbourhood in the reconstructed phase space , the minimum square-root-error criterion and the steepest descent principle is proposed. It can convert the time domain into the multi-dimensional vector domain , and predict chaotic time series by nonlinear filter. The result of computer simulation illustrates that the algorithm is available to predict some chaotic series and anti-noise .

Keywords : chaotic time series , reconstructed vector , nonlinear adaptive prediction , the minimum square root error criterion

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Defense Foundation of China(Grant No.51435050101DZ0203).