第 52 卷 第 5 期 2003 年 5 月
1000-3290/2003/52(05)/1108-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52, No.5, May, 2003

一类 3 维连续混沌系统观测器*

周 平
(重庆邮电学院非线性系统研究所,重庆 400065)
(2002 年 8 月 21 日收到;2002 年 9 月 28 日收到修改稿)

讨论了一类连续三维混沌系统的混沌观测器的设计问题.对于此类混沌系统,仅利用系统的一个状态变量及它对时间的一阶、二阶导数就可以使得观测器的状态变量同被观测系统的状态变量达到同步.

关键词:混沌系统,观测器,导数,同步
PACC:0545

1. 引 言

混沌控制和混沌同步技术已经引起了人们的广泛兴趣,多种同步技术已经得到了深入的研究[1—8].状态反馈控制是对混沌进行控制的一个重要方法,但实施状态反馈控制的必要条件是人们必须对该系统的状态变量进行物理测量,然而,一个系统的状态变量并非都容易用物理办法测量出来,甚至有些状态变量根本就无法测量到,所以状态变量是否可以测量是状态反馈控制必须解决的问题.状态观测器是解决这个问题的有效方法之一.

文献[9,10]就混沌系统只含有一个非线性项的观测器问题进行了研究,取得了较好的结果.但他们在设计观测器的过程中,使用了系统的多个状态变量,而系统的所有状态变量并非都能物理测量出来,另外混沌系统有时含有多个非线性项,所以他们的研究是有局限性的.文献[11]就一类 3 维混沌系统的吸引子问题进行了研究,得到利用系统的标量输出及它对时间的一阶、二阶导数可以对吸引子进行观测.本文针对文献[11]所研究的一类混沌系统,利用其观测混沌吸引子的思想,使用混沌系统的一个状态变量及其对时间的一阶、二阶导数,研究了此类系统状态观测器的设计问题.这种设计方法,目前在国内外文献中报道较少.

2. 基本理论

考虑如下混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ s = s(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, $f: R^n \to R^n$, $s \in R^n$ 是系统的输出.

定义 系统

$$\dot{y} = f(y) + g(s(x) - s(y)), \tag{2}$$

其中 $y \in R^n$, $g: R^n \to R^n$ 为待定的非线性函数.如果在任意初始条件 $x(0)$, $y(0)$ 下,系统(2)与系统(1)满足 $\lim\limits_{t \to +\infty}(y - x) = 0$,则称系统(2)是混沌系统(1)的一个状态观测器.

由非线性控制理论可知,没有一个普遍的方法来选择函数 $g(s(x) - s(y))$,使得 $\lim\limits_{t \to +\infty}(y - x) = 0$ 成立(在任意初始条件 $x(0)$, $y(0)$ 下).只能根据具体的混沌系统采用适当的方法来选择函数 $g(s(x) - s(y))$.

本文研究如下一类三维连续混沌系统[11]的观测器问题,此类混沌系统为

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, f = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}.$$

混沌系统(3)满足如下条件[11]:存在一个特定的状态变量 x_i 作为系统的输出时,其余两个状态变量可以表示为

$$x_j = g_j(x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i), j \neq i$$

* 重庆邮电学院自然科学基金(批准号:A2002-01)资助的课题.

（文献广泛研究的洛伦兹混沌系统、Rössler 混沌系统、Chua's 混沌系统和 Chen[12] 混沌系统等可物理实现的系统都满足此条件）. 为讨论方便，不妨设 x_1 是一个特定的状态变量并作为系统的输出，故有 $x_2 = g_2(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$，$x_3 = g_3(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$，所以系统(3)又可以表示为

$$\dot{x} = Ax + g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1), \tag{4}$$

其中 A 是常实数矩阵. $g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$是一个 3×1 的矩阵，它含混沌系统的所有非线性项.

定理　设系统(3)给定的输出具有形式

$$s(x) = g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) + B\times(x_1\quad g_2(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)\quad g_3(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1))^{\mathrm{T}},$$

其中 B 是一个 3×3 的常实数对角矩阵，矩阵元 $b_{ij} = b_i (i = j)$，$b_{ij} = 0 (i \neq j)(i, j = 1,2,3)$. 可见这是仅由一个系统状态变量及其对时间的一阶、二阶导数决定的输出. 如果对角矩阵 B 的选择使得矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，则系统

$$\dot{y} = f(y) + (s(x) - s(y)) \tag{5}$$

是系统(3)的一个混沌观测器. (5)式中

$$s(y) = g(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1) + B\times(y_1\quad g_2(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1)\quad g_3(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1))^{\mathrm{T}}.$$

证明

令 $e = y - x$，

则

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{x} = f(y) - f(x) + s(x) - s(y).$$

利用 $x_2 = g_2(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$，$x_3 = g_3(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$和 $y_2 = g_2(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1)$，$y_3 = g_3(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1)$，由上式可得

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{x} = (A - B)e. \tag{6}$$

由于矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，故线性系统(6)的零点是渐进稳定的，即有 $\lim\limits_{t\to+\infty} e = 0$ 或 $\lim\limits_{t\to+\infty}(y - x) = 0$，因此系统(5)是系统(3)的一个混沌观测器.

上述结果表明，对于一类连续 3 维混沌系统，仅利用系统的一个状态变量及其对时间的一阶、二阶导数就可以实现此类系统的混沌同步.

3. 应用举例

作为上面理论的应用，现研究几个具有确定物理意义的混沌系统.

3.1. 洛伦兹系统

洛伦兹混沌系统如下：

$$\dot{x} = f(x):\begin{cases}\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_1x_3 - x_2,\\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3.\end{cases} \tag{7}$$

选择 x_1 作为输出，则有

$$\begin{cases}x_2 = g_2(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) = \dot{x}_1/a + x_1,\\ x_3 = g_3(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) = [-\ddot{x}_1/a - \dot{x}_1(1/a + 1)\\ \qquad + x_1(c - 1)]/x_1, x_1 \neq 0.\end{cases}$$

所以(7)式可以写成

$$\dot{x} = Ax + g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1).$$

易得

$$A = \begin{pmatrix}-a & a & 0\\ c & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix},$$

$$g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) = \begin{pmatrix}0\\ \ddot{x}_1/a + \dot{x}_1(1/a + 1) - x_1(c - 1)\\ x_1\dot{x}_1/a + x_1^2\end{pmatrix}.$$

如果选择系统(7)具有

$$s(x) = g(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) + B\times(x_1\quad g_2(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)\quad g_3(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1))^{\mathrm{T}}$$

形式的输出，则洛伦兹混沌系统的一个待定观测器为

$$\dot{y} = f(y) + (s(x) - s(y)). \tag{8}$$

根据前面理论，选择适当的对角矩阵

$$B = \begin{pmatrix}b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix},$$

使得矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，就可以使得(8)式为洛伦兹混沌系统的一个混沌观测器. 为此只需选择 $b_3 > -b$ 和满足特征方程$(\lambda + b_1 + a)(\lambda + b_2 + 1) - ac = 0$ 中特征解 λ 具有负实部的 b_1, b_2 即可. 如果采用文献[9]的设计方法是不可能设计出此系统的混沌观测器. 对于洛伦兹系统(7)，当系统参数为 $a = 10$，$c = 28$，$b = 8/3$ 时，系统处于混沌. 为使系统(8)是系统(7)的一个混沌观测器，即使得矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，为此只需选择 $b_3 > -8/3$ 和满足特征方程$(\lambda + b_1 + 10)(\lambda + b_2 + 1) - 280 = 0$ 中特征解 λ 具有负实部的 b_1, b_2 即可. 读者不难找到这样的 b_1, b_2, b_3，比如$(b_1, b_2, b_3) = (20, 19, 0)$.

3.2. Rössler 系统

Rössler 混沌系统如下：

$$\dot{x} = f(x):\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 - x_3,\\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2,\\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - b x_3 + c.\end{cases} \tag{9}$$

选择 x_1 作为输出，则有

$$\begin{cases} x_2 = g_2(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)\\ \quad = -\dot{x}_1 - (-\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 - x_1 - c)/(x_1 - a - b),\\ \quad x_1 \neq a + b,\\ x_3 = g_3(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)\\ \quad = (-\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 - x_1 - c)/(x_1 - a - b),\\ \quad x_1 \neq a + b.\end{cases}$$

系统(9)改写为

$$\dot{x} = Ax + g(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1),$$

可见

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix},$$

$$g(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x_1(-\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 - x_1 - c)/(x_1 - a - b) + c\end{pmatrix}$$
$$(x_1 \neq a + b).$$

同理选择系统(9)具有

$$s(x) = g(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1) + B\times(x_1 \quad g_2(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1) \quad g_3(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1))^{\mathrm{T}}$$

形式的输出，则可得到 Rössler 混沌系统的一个待定观测器为

$$\dot{y} = f(y) + (s(x) - s(y)). \tag{10}$$

选择对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix}$ 中的 $b_3 > -b$，以及满足特征方程 $(\lambda + b_1)(\lambda + b_2 - a) + 1 = 0$ 中特征解 λ 具有负实部的 b_1, b_2，就可以使得矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，即 Rössler 系统的一个混沌观测器就设计出来了. 将混沌系统(9)的系统参数代入 $A - B$ 中，读者不难找到这样的 b_1, b_2, b_3.

3.3. Chua 's 系统

Chua 's 混沌系统如下：

$$\dot{x} = f(x):\begin{cases}\dot{x}_1 = a(x_1 - x_2 - f(x_1)),\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 = -b x_2.\end{cases} \tag{11}$$

选择 x_3 作为输出，则有

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) = -\ddot{x}_3/b - \dot{x}_3/b - x_3,\\ x_2 = g_2(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) = -\dot{x}_3/b.\end{cases}$$

系统(11)又可以写成

$$\dot{x} = Ax + g(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3),$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -b & 0\end{pmatrix},$$

$$g(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) = \begin{pmatrix} -af(-\ddot{x}_3/b - \dot{x}_3/b - x_3)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

同理选择系统(11)具有

$$s(x) = g(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) + B\times(g_1(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) \quad g_2(x_3,\dot{x}_3,\ddot{x}_3) \quad x_3)^{\mathrm{T}}$$

形式的输出，则可得到 Chua 's 混沌系统的一个待定观测器为

$$\dot{y} = f(y) + (s(x) - s(y)). \tag{12}$$

选择对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix}$ 中的 b_1, b_2, b_3，使得 $A - B$ 的特征方程 $(-\lambda - b_1 + a)(-\lambda - b_2 - 1)(-\lambda - b_3) + b(-\lambda - b_1 + a) + a(-\lambda - b_3) = 0$ 中特征解 λ 具有负实部，就可以使得矩阵 $A - B$ 的特征值都具有负实部，故如(12)式的 Chua 's 系统的混沌观测器就被确定了. 将混沌系统(11)的系统参数代入 $A - B$ 中，读者不难找到这样的 b_1, b_2, b_3.

3.4. Chen 系统[12]

Chen 混沌系统为

$$\dot{x} = f(x):\begin{cases}\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1 x_3 + c x_2,\\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3.\end{cases} \tag{13}$$

选择 x_1 作为输出，则有

$$\begin{cases} x_2 = g_2(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1) = \dot{x}_1/a + x_1,\\ x_3 = g_3(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)\\ \quad = [-\ddot{x}_1/a - \dot{x}_1(1 - c/a)\\ \quad\quad + (2c - a)x_1]/x_1, x_1 \neq 0.\end{cases}$$

同前面例子一样分析，易得

$$A=\begin{pmatrix}-a & a & 0\\ c-a & c & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix},$$

$$g(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)=\begin{pmatrix}0\\ \ddot{x}_1/a+\dot{x}_1(1-c/a)-(2c-a)x_1\\ x_1\dot{x}_1/a+x_1^2\end{pmatrix}.$$

当系统(13)具有如下形式的输出时，

$$s(x)=g(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)+B\times(x_1\quad g_2(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)\quad g_3(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1))^{\mathrm{T}}.$$

选择对角矩阵 $B=\begin{pmatrix}b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix}$中的 $b_3>-b$，以及满足方程$(\lambda+b_1+a)(\lambda+b_2-c)-a(c-a)=0$中特征解 λ 具有负实部的b_1，b_2，就可以使得矩阵 $A-B$ 的特征值都具有负实部，所以 Chen 系统的一个混沌观测器为

$$\dot{y}=f(y)+(s(x)-s(y)). \tag{14}$$

将混沌系统(13)的系统参数代入 $A-B$ 中，读者不难找到这样的 b_1，b_2，b_3. 如果采用文献[9]的方法是不可能设计出此系统的混沌观测器.

4. 结　　论

本文讨论了一类具有实际物理意义的混沌系统的观测器设计问题. 对于此类混沌系统，只需利用系统的一个状态变量和它对时间的一阶、二阶导数就可以使得单向耦合全同混沌系统达到混沌同步. 本文所采用的设计方法，目前在国内外文献中报道较少. 由于本文研究的混沌系统都是物理可实现的系统，所以本文研究结果具有实际应用意义.

在此作者衷心感谢重庆邮电学院杨晓松教授(博士)提供他本人的最新研究成果的文献，同时感谢与杨晓松教授的有益讨论.

[1] Pecoram, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
[2] Pecoram, Carroll T L 1991 *Phys. Rev.* A **4** 2374
[3] Otte, Grebogic, Yorke J A 1990 *Phys. Rev.* **64** 1196
[4] Duan C K and Yang S S 1997 *Phys. Lett.* A **229** 51
[5] Gao J F *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 838(in Chinese)[高金峰等 2000 物理学报 **49** 838]
[6] Li Z *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 847(in Chinese)[李　智等 2001 物理学报 **50** 847]
[7] Zhou P 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1804(in Chinese)[周　平 1999 物理学报 **48** 1804]
[8] Li Z and Han C Z 2001 *Chin. Phys.* **11** 9
[9] Matematica D D and Mascolo S 1998 *IEEE ISCAS* **6** 283
[10] Yang X S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1919(in Chinese)[杨晓松 2000 物理学报 **49** 1919]
[11] Yang X S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 1159
[12] Chen G and Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465

Observers for a class of 3D continuous chaotic systems*

Zhou　Ping
(*Institute for Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecommunication, Chongqing* 400065, *China*)
(Received 21 August 2002; revised manuscript received 28 September 2002)

Abstract

In this paper the design of observers of a class of 3D continuous chaotic systems is discussed. Only using a state variable and its (first-and second-order) time derivatives, one can construct a control law to implement the synchronization between the investigated chaotic systems and its observers.

Keywords: chaotic systems, observers, derivative, synchronization
PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Chongqing University of Posts and Telecommunication, China (Grant No. A2002-01).