

具有色关联的色噪声驱动下单一模激光 线性模型的随机共振^{*}

张良英^{1,2)} 曹 力¹⁾ 吴大进³⁾

¹⁾(华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

²⁾(襄樊学院物理系, 襄樊 441053)

³⁾(华中科技大学物理系, 武汉 430074)

(2002 年 6 月 10 日收到 2002 年 9 月 12 日收到修改稿)

研究了具有指数形式关联的两色噪声驱动下单一模激光线性模型受信号调制后其输出信噪比, 发现了随机共振现象。根据计算结果讨论了噪声(即噪声强度、噪声间互关联程度和关联时间)和信号(信号频率和信号振幅)对信噪比的影响。

关键词: 随机共振, 噪声关联时间, 信噪比

PACC: 4250, 0540, 4260K

1. 引 言

随机共振的概念是由 R. Benzi 在研究古气象冰川问题时提出的。目前, 随机共振现象已经在气候学、化学、激光物理、生物学、神经学、固态物理等学科中被实验所观察到^[1,2]。20 世纪 90 年代初, 人们认为, 双稳或多稳的非线性系统、噪声和输入信号是出现随机共振的三个必不可少的条件。近年来, 人们发现上述三个条件并非缺一不可。在单稳系统中可以出现随机共振现象^[3], 在没有外加周期力的二维系统中由于存在内在的周期性质, 也可以产生随机共振^[4], 就是在线性系统中也可以出现随机共振现象^[5-7]。

激光器工作时总是伴随有涨落的出现^[8,9], 因此对激光系统输入信号后, 噪声和信号之间会存在协作效应, 从而出现随机共振现象。研究者们首先在环形激光器中发现了随机共振现象^[10], 目前, 激光系统的随机共振现象是人们研究的重要课题。许多随机系统往往由多个噪声驱动。例如激光系统就存在两种噪声, 一种是自发辐射的量子噪声, 以加法噪声形式出现; 另一种是泵噪声, 以乘法噪声形式出现。最近几年来, 为更接近实际情况, 研究者们还进一步

考虑了噪声间的互关联。互关联往往考虑为两种形式, 一种是 δ 函数形式(如 $\lambda \sqrt{QD} \delta(t - t')$), 另一种是 e 指数形式, 如

$$\frac{\lambda \sqrt{QD}}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau}\right)^{[11-14]}.$$

本文研究了具有指数形式关联的两色噪声驱动下, 单模激光线性模型的随机共振。以往所研究的线性系统均存在乘法噪声, 且噪声一定要求有“色”, 才会在线性系统中出现随机共振现象。本文采用的单模激光线性模型, 其乘法噪声和加法噪声经过线性化后均变为加法噪声, 两噪声均考虑为“色”噪声, 当计算了受信号调制后的输出信噪比后, 发现了漂亮的随机共振单峰响应曲线。我们还进一步讨论了噪声、信号和互关联程度与互关联时间等对随机共振的影响。

本文的计算结果是未作任何近似的精确解析表达式, 因此对信号的振幅和频率以及噪声强度均未作任何限制, 因此可以揭示出由于近似限制范围以外的规律。

2. 输入信号后的单模激光光强输出功率谱及信噪比

单模激光增益模型输入信号后的光强方程为

* 国家自然科学基金(批准号: 19975020)资助的课题。

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} = & -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) \\ & + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos\Omega t.\end{aligned}\quad (1)$$

设两噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的自关联时间和两噪声间的互关联时间相等, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \eta(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{Q}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ \eta(t)\eta(t') &= \frac{D}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ \xi(t)\eta(t') &= \xi(t')\eta(t) \\ &= \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ -1 &\leq \lambda \leq 1.\end{aligned}\quad (2)$$

当(2)式中的 $\tau \rightarrow 0$ 时, 就过渡到 δ 函数关联形式

$$\begin{aligned}\xi(t)\xi(t') &= Q\delta(t-t'), \\ \eta(t)\eta(t') &= D\delta(t-t'), \\ \xi(t)\eta(t') &= \xi(t')\eta(t) = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t'),\end{aligned}\quad (3)$$

式中 I 为激光光强; λ 为衡量噪声关联程度的参数; Q, D 分别为乘法和加法噪声强度; τ 为噪声间的互关联时间和两噪声的自关联时间; $\beta = \frac{A}{\Gamma}$, A 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数。

将(1)式在确定论定态光强 $I_0 = (\Gamma - K)\beta K$ 附近线性化

$$I = I_0 + \epsilon(t), \quad (4)$$

其中 $\epsilon(t)$ 为微扰项, 可得线性化方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon(t)}{dt} = & -\gamma\epsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(t) \\ & + 2\sqrt{I_0}\eta(t) + A\cos\Omega t,\end{aligned}\quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned}\gamma &= 2K(\Gamma - K)\beta\Gamma, \\ \epsilon(t) &= \frac{D}{\gamma} - \left(\frac{D}{\gamma} + \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2}\right)e^{-\gamma t} \\ &+ \frac{A}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}}\cos(\Omega t - \Theta),\end{aligned}\quad (6)$$

其中

$$\cos\Theta = \frac{\gamma}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\Omega}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}}.$$

根据平均光强相关函数的定义:

$$B(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \overline{I(t'+t)I(t')}, \quad (7)$$

式中

$$\overline{I(t'+t)I(t')} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(t'+t)I(t') dt',$$

可得到平均光强相关函数为(只讨论 $\gamma \neq \tau^{-1}$)

$$\begin{aligned}B(t) = & \frac{A^2}{\chi(\gamma^2 + \Omega^2)} \cos\Omega t + I_0^2 + \frac{2I_0D}{\gamma} + \frac{D^2}{\gamma^2} \\ & + \left(\frac{2I_0^2Q}{\tau(1+\beta I_0)^2} + \frac{2I_0D}{\tau} + \frac{4I_0^{3/2}\lambda\sqrt{DQ}}{\tau(1+\beta I_0)} \right) \\ & \times \left(\frac{1}{(\gamma^2 - \tau^{-2})} e^{-\frac{|t|}{\tau}} - \frac{\tau^{-1}}{\chi(\gamma^2 - \tau^{-2})} e^{-\gamma|t|} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

将(8)式做傅里叶变换, 得到光强的功率谱为

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega). \quad (9)$$

$S_1(\omega)$ 为输出信号功率谱, $S_2(\omega)$ 为输出噪声功率谱, 具体形式为

$$\begin{aligned}S_1(\omega) &= \frac{\pi A^2}{\chi(\gamma^2 + \Omega^2)} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)], \\ S_2(\omega) &= \left[\frac{4I_0^2Q}{(1+\beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2}\lambda\sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)} + 4I_0D \right] \\ &\times \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2)(\omega^2\tau^2 + 1)}.\end{aligned}$$

信噪比定义为输出总信号功率与 $\omega = \Omega$ 处的单位噪声谱的平均功率之比(只取正 ω 的谱)

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)}, \quad (10)$$

式中

$$P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega.$$

则有

$$R = \frac{\frac{\pi A^2}{2}(\tau^2\Omega^2 + 1)}{\frac{4I_0^2Q}{(1+\beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2}\lambda\sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)} + 4I_0D}.$$

3. 结论和讨论

下面讨论信噪比 R 受噪声的影响。

3.1. 信噪比 R 受乘法噪声强度 Q 的影响

图 1 是根据(10)式以 Ω, τ, D 为参数分别画出的 $R-Q$ 曲线。由图 1(a)可以看出, 信噪比 R 随乘法噪声强度 Q 的增大出现一个共振峰, 且随着信号频率 Ω 的增大, R 的峰值增高。由图 1(b)可以看出, 随着噪声自关联和互关联时间 τ 的增大, R 的峰值增高。由图 1(c)可以看出, 随着加法噪声强度 D 的增加, 极值位置向右移动, 同时 R 的峰值降低。

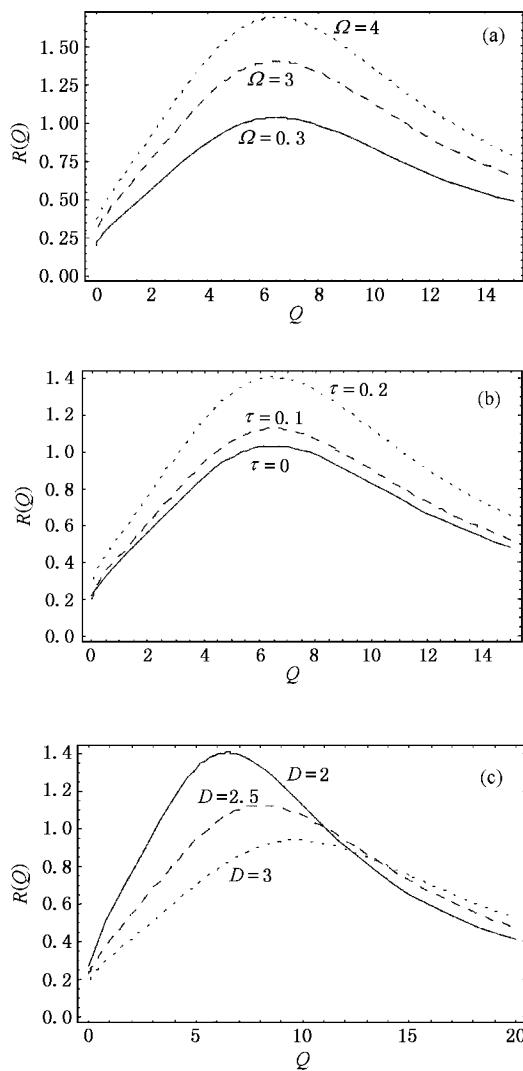


图1 信噪比 R 和乘法噪声强度 Q 的函数关系曲线($\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.9$, (a) $D = 2, \tau = 0.2$, (b) $\Omega = 3, D = 2$, (c) $\Omega = 3, \tau = 0.2$)

3.2. 信噪比 R 受加法噪声强度 D 的影响

图2是根据(10)式分别以 Ω, τ, Q 为参数画出的 $R-D$ 曲线. 由图2(a)可以看出, 信噪比 R 随加法噪声强度 D 的增大也会出现一个共振峰, 且随着信号频率 Ω 的增大, R 的峰值增高. $R-D$ 曲线与 $R-Q$ 曲线比较, 发现峰更尖锐. 由图2(b)可以看出, 随着噪声自关联和互关联时间 τ 的增大, R 的峰值增高. 由图2(c)可以看出, 随着乘法噪声强度 Q 的增加, 极值位置向右移动, 同时 R 的峰值降低.

3.3. 信噪比 R 受噪声间互关联程度 λ 的影响

加法噪声强度 D 和乘法噪声强度 Q 之间的关联

程度 λ 的取值对随机共振影响很不相同. 图3(a)是根据(10)式以 λ 为参数画出的 $R-Q$ 曲线, 可以看出, $\lambda \geq 0$ 时不会出现共振, 只有当 $\lambda < 0$ 时才有共振出现, $|\lambda|$ 的绝对值增大, 极值位置向右移动, 峰值增高.

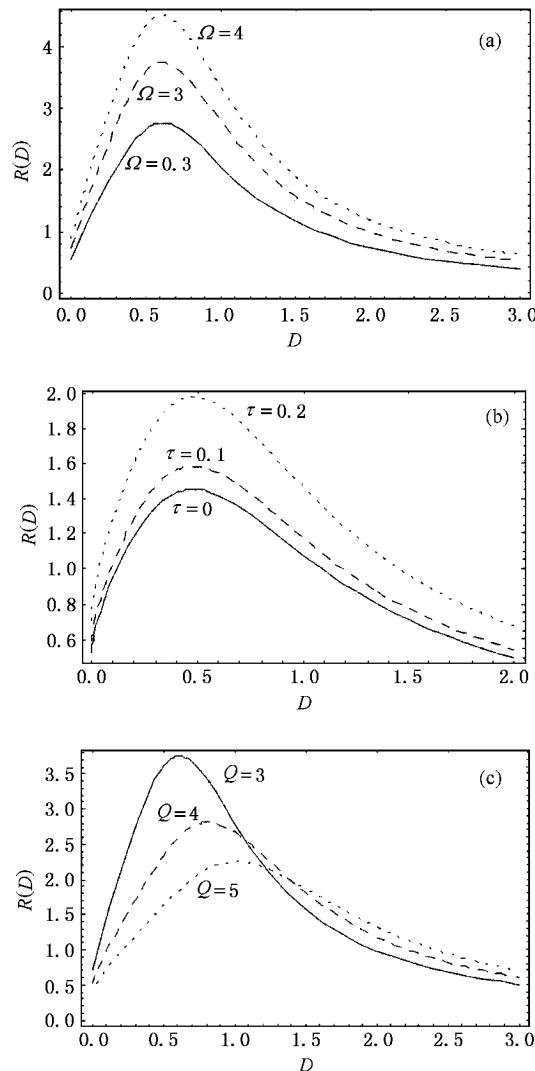


图2 信噪比 R 和加法噪声强度 D 的函数关系曲线($\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.9, Q = 3, \tau = 0.2$, (a) $\lambda = -0.8, Q = 3, \tau = 0.2$, (b) $\lambda = -0.9, Q = 3, \tau = 0.2$)

图3(b)是根据(10)式以 λ 为参数画出的 $R-D$ 曲线, 可以看出, $\lambda \geq 0$ 时不会出现共振, 只有当 $\lambda < 0$ 时才有共振出现, $|\lambda|$ 的绝对值增大, 极值位置向右移动, 峰值增高. 比较 $R-D$ 曲线与 $R-Q$ 曲线, 可以看出前者的峰更尖锐.

下面进一步从数学上详释上述结论, 将(10)式写为

$$R = \frac{\pi A^2}{2} \frac{(\Omega^2 \tau^2 + 1)}{aQ + b\sqrt{Q} + c},$$

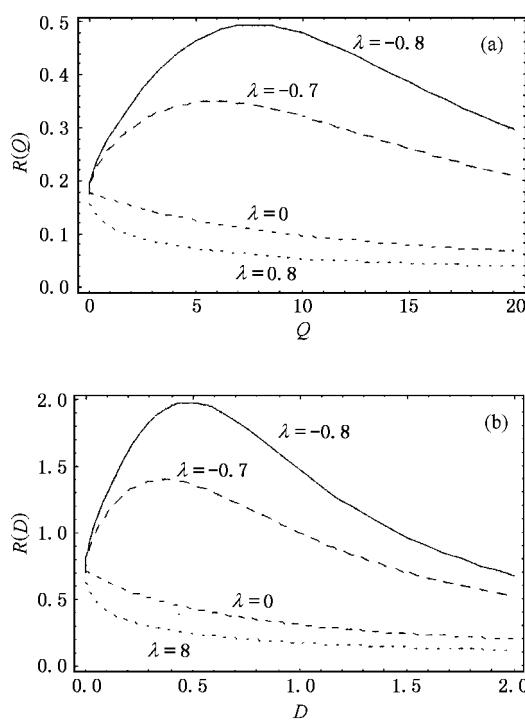


图3 噪声间互关联程度 λ 对随机共振的影响($\beta=1, I_0=1, A=1, \Omega=3, \tau=0.2$.(a) $D=3$, (b) $Q=3$)

式中

$$a = \frac{4I_0^2}{(1 + \beta I_0)^2}, b = \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{D}}{(1 + \beta I_0)}, c = 4I_0 D.$$

R - Q 曲线有极大值的条件是 $a > 0, b < 0, b^2 - 4ac < 0$, 因此 λ 的取值只有在 $-1 < \lambda < 0$ 范围内, 才能满足以上条件.

3.4. 对 $\tau \rightarrow 0$ 极限情况的讨论

当(10)式中的 $\tau \rightarrow 0$ 时, 得到

$$R = \frac{\frac{\pi A^2}{2}}{\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0 D}. \quad (11)$$

(11)式回到了文献[15]的计算结果, 从(10)式和(11)式的比较可看出, 两噪声和噪声间具有 δ 函数形式关联的信噪比 R 与信号频率 Ω 无关, 而两噪声和噪声间具有指数形式关联的信噪比 R 则受到信号频率 Ω 的影响. 两噪声和噪声间具有 δ 函数形式关联的信噪比 R 与关联时间 τ 无关, 而两噪声和噪声间具有指数形式关联的信噪比 R 则受到关联时间 τ 的影响.

- [1] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House)
- [2] Li J H et al 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese) 李静辉等 1998 *物理学报* **47** 382]
- [3] Berdichevsky V and Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [4] Hu G 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [5] Berdichevsky V and Gitterman M. 1996 *Europhys. Lett.* **36**(3) 161
- [6] Berdichevsky V and Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [7] Barzykin V and Seki K 1997 *Europhys. Lett.* **40** 117
- [8] Zhu S , Yu A W and Roy R 1986 *Phys. Rev. A* **34** 4333
- [9] Luo X Q et al 2001 *Chin. Phys.* **10** 1011
- [10] Gammaltoni L , Hanggi P , Jung P , Marchesoni F. 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [11] Cao L and Wu D J 1994 *Phys. Lett. A* **185** 59
- [12] Cao L and Wu D J 1995 *Phys. Rev. A* **51** 3196
- [13] Mei D , Xie G , Cao L and Wu D 1999 *Acta Phys. Sin. (Overseas Edition)* **8** 174
- [14] Luo X Q et al 2002 *Acta Phys. Sin* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴等 2002 *物理学报* **51** 977]
- [15] Zhang L Y et al 2002 *Journal of Huazhong University of Science and Technology* **30**(8) 94 (in Chinese) [张良英等 2002 *华中科技大学学报* **30**(8) 94]

Stochastic resonances in the linear model of single-mode lasers driven by color noises with color cross-correlation^{*}

Zhang Liang-Ying^{1,2)} Cao Li¹⁾ Wu Da-Jin³⁾

¹⁾ State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

²⁾ Department of Physics, Xiangfan University, Xiangfan 441053, China

³⁾ Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

(Received 10 June 2002; revised manuscript received 12 September 2002)

Abstract

We have detected the stochastic resonance (SR) phenomenon by studying the output signal-to-noise ratio (SNR) of the linear model of single-mode laser, which is driven by two color noises correlated in the form of an exponential function. Moreover, we also discuss the influence on SNR from the noise (noise intensity, correlated strength and correlation time between noises) and signal (signal frequency and signal amplitude).

Keywords : stochastic resonance, noise correlation time, signal-to-noise rate

PACC : 4250, 0540, 4260K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975020).