第 52 卷 第 5 期 2003 年 5 月
1000-3290/2003/52(05)/1230-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.5,May,2003

介观无损耗传输线中电流的量子涨落

王忠纯

(盐城师范学院物理系,盐城 224002)

(2002 年 6 月 20 日收到;2002 年 8 月 22 日收到修改稿)

在将介观无损耗传输线量子化的基础上,研究了真空态和压缩真空态下传输线中电流和电流梯度的量子涨落.着重分析了传输线与一般 LC 电路量子涨落的差异.

关键词:介观无损耗传输线,真空态,压缩真空态,量子涨落

PACC:7335,0365

1. 引 言

随着纳米技术的发展,集成电路日趋微型化,电子器件的工作速度愈来愈高.当电路及器件介观化时,必须考虑量子效应.近年来许多文献介绍了关于 RLC(或 LC)介观电路的量子化问题[1—9],但研究的都是集中性的元件.至今对于具有分布电感和分布电容的传输线电路的量子涨落问题的研究未见报道.本文利用 Louisell 提出的无损耗传输线的量子化方案[10],简单介绍了单模信号在介观无损耗传输线中的量子化,然后计算并分析了真空态和压缩真空态下传输线中电流和电流梯度的量子涨落.

2. 无损耗传输线的量子化

设单位长度传输线的电感和电容分别为 L 和 C.在忽略传输线损耗的情况下,传输线中的电压和电流满足波动方程[11]

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

其中 $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 为波的传播速度.方程(1)的平面前进波解为

$$j(z,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kz} + A^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kz}, \tag{3}$$

式中 A, A^* 为任意常数,波数 $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$.可求出电压与电流的关系为[10]

$$v(z,t) = \sqrt{\frac{L}{C}} j(z,t). \tag{4}$$

以下简要介绍 Louisell 将传输线量子化的方法[10].对于一个确定的模,ω 一定,则 λ 和 k 一定.若取传输线长度 z_o 为波长的固定整数倍,即 $z_o = m\lambda = 2\pi m/k$,其中 m 为一个固定的整数,则此传输线中的能量为

$$H = \frac{1}{2}\int_0^{z_o} (Lj^2 + Cv^2)\,\mathrm{d}z = \int_0^{z_o} Lj^2\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

以上利用了(4)式.将(3)式代入(5)式可积出

$$H = 2LAA^* z_o. \tag{6}$$

若以 $\hbar\omega$ 为能量单位,即取

$$A = a\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}, \tag{7}$$

则

$$H = \hbar\omega a^* a. \tag{8}$$

由(3)式得传输线中电流的一个前进模为

$$j(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kz} + a^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}kz}). \tag{9}$$

确定了 a 和 a^*,则电流 j 和电压 v 也就确定了.由于(8)式与用升降算符表示的谐振子的 Hamilton 算符相似(只是少了零点能)[12],这就提示我们令

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + \mathrm{i}p),$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - \mathrm{i}p),$$

其中 q, p 均为实变量,则 $H = 1/2(p^2 + \omega^2 q^2)$.这正是坐标和动量分别为 q, p 的单位质量谐振子的 Hamilton 量.q, p 为正则变量.令

$$[q, p] = \mathrm{i}\hbar$$

则

$$[a, a^+] = 1 \tag{10}$$

就实现了传输线的量子化.将(9)式中的 a^*,a 分别用升、降算符代替,得传输线中的电流算符为

$$j(z,t)=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}\left(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}+a^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}kz}\right). \tag{11}$$

Heisenberg 图像中的升、降算符与 Schrödinger 图像中的升、降算符关系为

$$a_{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega ta^+a}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega ta^+a}=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{12}$$

$$a_{\mathrm{H}}^+=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega ta^+a}a^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega ta^+a}=a^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{13}$$

则得 H 图像中的电流算符

$$j_{\mathrm{H}}=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}\left(a_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+a_{\mathrm{H}}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\right), \tag{14}$$

H 图像与 S 图像中的 Hamilton 算符形式相同

$$H_{\mathrm{H}}=\hbar\omega a_{\mathrm{H}}^+a_{\mathrm{H}}=\hbar\omega a^+a. \tag{15}$$

传输线中电流的梯度为

$$\frac{\partial j_{\mathrm{H}}}{\partial z}=\mathrm{i}k\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}\left(a_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-a_{\mathrm{H}}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\right), \tag{16}$$

$$\left[j_{\mathrm{H}},\frac{\partial j_{\mathrm{H}}}{\partial z}\right]=-\frac{\mathrm{i}k\hbar\omega}{Lz_o}. \tag{17}$$

j_{H} 与 $\frac{\partial j_{\mathrm{H}}}{\partial z}$ 不对易,所以传输线中电流与电流的梯度不能同时确定.

3. 真空态下电流和电流梯度的量子涨落

利用 $[a,a^+]=1$,可定义真空态 $|0\rangle$.设 $t=0$ 时系统处在真空态.由于 $t=0$ 时 H 图像和 S 图像中的算符相同,所以以下求 $t=0$ 时的量子涨落时,略去算符的下标"H".在真空态下

$$\bar{j}=\langle 0|j|0|\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}\langle 0|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+a^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}|0\rangle=0, \tag{18}$$

$$\overline{j^2}=\langle 0|j^2|0\rangle$$
$$=\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\langle 0|(a^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kz}+a^{+2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kz}+aa^++a^+a)|0\rangle$$
$$=\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}. \tag{19}$$

电流的量子涨落

$$\overline{(\Delta_j)^2}=\overline{j^2}-\bar{j}^2=\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}. \tag{20}$$

同理可计算出

$$\overline{\frac{\partial j}{\partial z}}=0, \tag{21}$$

$$\overline{\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)^2}=\frac{k^2\hbar\omega}{2Lz_o}. \tag{22}$$

电流梯度的量子涨落

$$\overline{\left[\Delta\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)\right]^2}=\overline{\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)^2}-\overline{\frac{\partial j}{\partial z}}^2$$
$$=\frac{k^2\hbar\omega}{2Lz_o}=\frac{\hbar C\omega^3}{2z_o}. \tag{23}$$

在真空态下,传输线中的电流和电流的梯度均存在量子涨落,它们的量子涨落之积

$$\overline{(\Delta j)^2}\cdot\overline{\left[\Delta\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)\right]^2}=\frac{k^2\hbar^2\omega^2}{4L^2z_o^2}=\frac{\hbar^2\omega^4C}{4Lz_o^2}. \tag{24}$$

这与由对易关系(17)式直接得出的结果一致.由(20)和(23)式可见,真空态下传输线中电流和电流梯度的量子涨落均与传输线上观察点的位置无关,与真空态下 LC 电路的情况相似[5].当传输线长度 $z_o=m\lambda$ 一定时,ω 愈大,电流和电流梯度的量子涨落也愈大.由于电流梯度的量子涨落正比于 ω^3,所以它受频率变化的影响更大.电流与电流梯度的量子涨落之积正比于 ω^4,并与传输线的特征阻抗 $\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的平方成反比.对于 ω 一定的情况,λ 也一定,电流和电流梯度的量子涨落随传输线长度 $z_o(m)$ 的减小而增大.

4. 压缩真空态下电流和电流梯度的量子涨落

利用压缩算符 $S(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi^*a^2-\frac{1}{2}\xi a^{+2}}$,可定义压缩真空态 $|0\rangle_s=S(\xi)|0\rangle$.其中 $\xi=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$r(0\leqslant r<\infty)$ 为压缩因子,压缩角 θ 决定压缩方向.在粒子数表象中压缩真空态可表示为[13]

$$|0\rangle_s=\mathrm{sech}^{1/2}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^n[(2n)!]^{1/2}}{2^nn!}|2n\rangle. \tag{25}$$

在压缩真空态下电流的平均值

$$\bar{j}={}_s\langle 0|j|0\rangle_s$$
$$=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_o}}\mathrm{sech}r\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^m[(2m)!]^{1/2}}{2^mm!}$$
$$\times\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^n[(2n)!]^{1/2}}{2^nn!}\langle 2m|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$$
$$+a^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}|2n\rangle$$
$$=0. \tag{26}$$

同理电流梯度的平均值为

$$\overline{\frac{\partial j}{\partial z}} = {}_s\langle 0 \mid \frac{\partial j}{\partial z} \mid 0\rangle_s = 0. \tag{27}$$

电流的方均值为

$$\begin{aligned}
\overline{j^2} &= {}_s\langle 0 \mid j^2 \mid 0\rangle_s \\
&= \frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^m[(2m)!]^{1/2}}{2^m m!} \\
&\quad\times\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^n[(2n)!]^{1/2}}{2^n n!}\langle 2m \mid (a^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kz} \\
&\quad + a^{+2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kz} + aa^+ + a^+ a) \mid 2n\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^m[(2m)!]^{1/2}}{2^m m!} \\
&\quad\times\frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{th}r)^n[(2n)!]^{1/2}}{2^n n!}\Big[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kz}\sqrt{2n(2n-1)}\,\delta_{m,n-1} \\
&\quad + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kz}\sqrt{(2n+2)(2n+1)}\,\delta_{m,n+1} + (4n+1)\delta_{m,n}\Big] \\
&= \frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n-1}(2n)!\,n}{2^{2n-1}(n!)^2}[-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2kz+\theta)}] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&\quad\times[-(2n+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2kz+\theta)}\mathrm{th}r + 4n + 1]\Big\} \\
&= \frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&\quad\times\Big[-(2n+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2kz+\theta)}\mathrm{th}r \\
&\quad - (2n+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2kz+\theta)}\mathrm{th}r + 4n + 1\Big] \\
&= \frac{\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&\quad\times\Big[4n + 1 - 2(2n+1)\mathrm{th}r\cos(2kz+\theta)\Big].
\end{aligned} \tag{28}$$

同理得电流梯度的方均值

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)^2} &= {}_s\langle 0 \mid \left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)^2 \mid 0\rangle_s \\
&= \frac{k^2\hbar\omega}{2Lz_o}\mathrm{sech}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&\quad\times\Big[4n + 1 + 2(2n+1)\mathrm{th}r\cos(2kz+\theta)\Big].
\end{aligned} \tag{29}$$

电流与电流梯度的量子涨落之积为

$$\begin{aligned}
\overline{(\Delta j)^2}\cdot\overline{\left[\Delta\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)\right]^2} &= \frac{\hbar^2\omega^4 C}{4z_o^2 L}\mathrm{sech}^2 r \\
&\quad\times\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\Big[4n + 1 - 2(2n+1) \\
&\quad\times\mathrm{th}r\cos(2kz+\theta)\Big]\Big\}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}r)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&\quad\times\Big[4n + 1 + 2(2n+1)\mathrm{th}r\cos(2kz+\theta)\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{30}$$

在压缩真空态下，电流与电流梯度的量子涨落之积仍然与 ω^4 成正比，与传输线的特征阻抗 $\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的平方成反比. 事实上(30)式中因子 $\hbar^2\omega^4 C/4z_o^2 L$ 就是真空态下电流与电流梯度的量子涨落之积，若令压缩因子 $r=0$，则(30)式与(24)式相同，真空态为压缩真空态的特例.

在压缩真空态下，介观传输线中的量子涨落不仅与电路参数和压缩参数有关，还与传输线中的位置 z 有关，这是具有分布电感和分布电容的电路与集中性元件的 LC 电路的主要差异. 若令 $\theta' = 2kz + \theta$，则(30)式中除因子 $\hbar^2\omega^4 C/4z_o^2 L$ 外，其余部分与文献[5]中 LC 电路的量子涨落有关因子项形式相同. 改变 $\theta' = 2kz + \theta$，则会改变电流、电流梯度的量子涨落. 如当 $2kz+\theta=0$ 或 $2kz+\theta=\pi$ 时，量子涨落之积不变，但电流、电流梯度的量子涨落的分配不同. 又如，当 $2kz+\theta=\pi/2$ 时，$\overline{(\Delta j)^2} = k^2\overline{\left[\Delta\left(\frac{\partial j}{\partial z}\right)\right]^2}$，此时电流与电流梯度的量子涨落间无压缩效应. 当电路参数和压缩参数给定时，在电路中不同的位置量子涨落一般不同，选取合适的电路参数和压缩参数可降低电流和电流梯度的噪声.

4. 结 论

本文研究了介观无损耗传输线中的一个前进模，在将其量子化的基础上，分别研究了当体系处于真空态和压缩真空态下时，电流、电流梯度的量子涨落. 计算结果表明，在真空态和压缩真空态下，传输线中的电流和电流梯度均存在量子涨落，且量子涨落之积都正比于频率的 4 次方，并与传输线特性阻抗的平方成反比. 在压缩真空态下，量子涨落不仅与压缩参数和电路的分布参数有关，还与传输线中的位置有关. 本文结论对于进一步设计微型电路、降低电路噪声有一定的指导意义.

[1] Chen B *et al* 1995 *Phys. Lett.* A **205** 121

[2] Chen B 1996 *Chinese Science Bulletin* **41** 1170(in Chinese)[陈斌 1996 科学通报 **41** 1170]

[3] Wang J S 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187(in Chinese)[王继锁 1998 物理学报 **47** 1187]

[4] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 965(in Chinese)[顾永建 2000 物理学报 **49** 965]

[5] Cui Y S 1998 *Acta Photonica Sinica* **27** 517(in Chinese)[崔元顺 1998 光子学报 **27** 517]

[6] Wu Q X 2002 *Acta Photonica Sinica* **31** 500(in Chinese)[吴奇学 光子学报 **31** 500]

[7] Ji Y H, Lei M S and Ouyang C Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 163

[8] Liang X T and Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486

[9] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490

[10] W H Louisell 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation*(New York :Jhon Wiley)

[11] Liang K M 1978 *Mathematical Physics* (Beijing: Higher Education Press) p 154(in Chinese)[梁昆淼 1978 数学物理方法(北京：高等教育出版社)第 154 页]

[12] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* (Vol. 1)(Beijing: Science Press) p 451 (in Chinese)[曾谨言 2000 量子力学(卷Ⅰ)(北京 科学出版社)第 451 页]

[13] Peng J S *et al* 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics*(Beijing: Science Press) p 184(in Chinese)[彭金生等著 1996 近代量子光学导论(北京 科学出版社)第 184 页]

Quantum fluctuations of current in a mesoscopic lossless transmission line

Wang Zhong-Chun

(*Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng 224002, China*)

(Received 20 June 2002; revised manuscript received 22 August 2002)

Abstract

Based upon the quantization of a mesoscopic lossless transmission line, analysis is made for the quantum fluctuations of the current and current gradient of the line in the vacuum state and squeezed vacuum state, especialy for the difference between the quantum fluctuations of the transmission line and LC circuit.

Keywords: mesoscopic lossless transmission line, vacuum state, squeezed vacuum state, quantum fluctuation

PACC: 7335, 0365