第 52 卷 第 7 期 2003 年 7 月
1000-3290/2003/52(07)/1579-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.7,July,2003

具有 n 维氢原子型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的束缚态*

陈昌远　刘成林　陆法林　孙东升

(盐城师范学院物理系,盐城　224002)

(2002 年 10 月 21 日收到;2002 年 11 月 26 日收到修改稿)

研究了具有 n 维氢原子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的束缚态性质,获得了束缚态的精确解.给出了精确的能谱方程和归一化的解析波函数,推导出径向平均值的两个递推关系和部分低幂次径向平均值的解析表达式.

关键词:n 维氢原子势,Klein-Gordon 方程,束缚态,精确解

PACC:0365,1110Q,1240Q

1. 引　　言

众所周知,讨论零自旋粒子在势场中运动的相对论效应要用 Klein-Gordon 方程,而研究 1/2 自旋粒子在势场中运动的相对论效应就要用 Dirac 方程.在以前的工作中,人们分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波的束缚态和散射态的精确解[1,2],Hu 等人[3] 在标量势大于矢量势条件下给出了 Hulthén 势的一维 Dirac 方程的束缚态精确解,以及标量势等于矢量势条件下三维 Dirac 方程的 s 波束缚态精确解.文献[4—6]在标量势等于矢量势条件下,讨论了修正 Pöschl-Teller 型势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的一维和三维 s 波束缚态的精确解,以及一维半空间线性势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程束缚态的精确解.文献[7—10]分别给出了 Morse,Wood-Saxon,Pöschl-Teller 以及 $\tan^2(\pi\eta r)$ 标量势与矢量势相等条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的三维 s 波束缚态的精确解.文献[11—15]研究了一维情况下部分势场的相对论效应.到目前为止,人们研究的各类势场的相对论效应主要集中在三维和低维问题中,有关 n 维势场的相对论效应还未见相关报道.然而在非相对论情况下,n 维氢原子和 n 维谐振子人们已做了很好的讨论[16—27],因此本文将对 n 维氢原子的相对论效应进行讨论,严格求解了具有标量型和矢量型的 n 维氢原子势的 Klein-Gordon 方程,获得了精确的能谱方程和归一化的解析波函数,给出了径向平均值的两个递推关系和部分低幂次径向平均值的解析表达式.

2. Klein-Gordon 方程的束缚态解

n 维氢原子是 n 维空间的各向同性的势,记其标量势和矢量势分别为

$$S(r) = -\frac{Z_s}{r}, \quad V(r) = -\frac{Z_v}{r} \qquad (Z_s, Z_v > 0). \tag{1}$$

由一维和三维具有标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的表达形式[1—14],可知 n 维空间中具有标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程为(取 $\hbar = c = 1$)

$$\{-\nabla^2 + [M + S(r)]^2\}\Psi(x) = [E - V(r)]^2\Psi(x). \tag{2}$$

采用 n 维球坐标系,把(1)式代入(2)式,则波函数可分离变量.为此,取

$$\Psi(x) = \frac{u(r)}{r^{(n-1)/2}} Y_{J_{n-2}J_{n-3}\cdots J_1 J_0}(\theta_{n-2}, \theta_{n-3}, \cdots, \theta_1, \theta_0), \tag{3}$$

式中 $0 \leqslant |J_0| \leqslant J_1 \leqslant \cdots J_{n-3} \leqslant J_{n-2}$,$Y_{J_{n-2}J_{n-3}\cdots J_1 J_0}$

* 江苏省教育厅自然科学基金(批准号:02KJB140007)及盐城师范学院专项基金资助的课题.

$(\theta_{n-2},\theta_{n-3},\cdots,\theta_1,\theta_0)$为 n 维空间的球函数，J_{n-2}为 SO_n 群的 Casmir 算子的量子数，其值为零和正整数，于是得具有 n 维氢原子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的径向方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\left\{[E^2-M^2]+2(MZ_s+EZ_v)\frac{1}{r}-(Z_s^2-Z_v^2)\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}\left[J_{n-2}(J_{n-2}+n-2)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]\right\}u(r)=0. \tag{4}$$

令

$$J'_n(J'_n+1)=J_{n-2}(J_{n-2}+n-2)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)+(Z_s^2-Z_v^2), \tag{5}$$

于是

$$J'_n=\begin{cases}J_{n-2}+(n-3)/2 & (Z_s=Z_v=Z),\\ \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[J_{n-2}+(n-1)/2][J_{n-2}+(n-3)/2]+4(Z_s^2-Z_v^2)}-1\right] & (Z_s\neq Z_v).\end{cases} \tag{6}$$

把(5)式代入(4)式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\left\{[E^2-M^2]+2(MZ_s+EZ_v)\frac{1}{r}-\frac{J'_n(J'_n+1)}{r^2}\right\}u(r)=0. \tag{7}$$

对于束缚态，$E<M$，为此，令

$$\alpha=[-4(E^2-M^2)]^{1/2},$$
$$\beta=\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{\alpha}=(MZ_s+EZ_v)\left(-\frac{1}{(E^2-M^2)}\right)^{1/2},$$
$$\rho=\alpha r, \tag{8}$$

则方程(7)可以化为无量纲方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\left(\frac{\beta}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{J'_n(J'_n+1)}{\rho^2}\right)u(\rho)=0, \tag{9}$$

满足束缚态要求的边界条件为 $u(0)=0$ 和 $u(\infty)=0$. 考虑到径向波函数在 $r\to0$ 和 $r\to\infty$ 时的渐近行为的要求，对于物理上允许的解，可以令

$$u(\rho)=\rho^{J'_n+1}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho\right)f(\rho), \tag{10}$$

把(10)式代入(9)式，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+[2(J'_n+1)-\rho]\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\beta-(J'_n+1)]f(\rho)=0. \tag{11}$$

这正是参数 $\alpha=[(J'_n+1)-\beta]$和 $\gamma=2(J'_n+1)$的合流超几何方程. 它在 $\rho\approx0$ 领域的解析解为合流超几何函数，一般为无穷级数. 但考虑到束缚态的边界条件，要求解必须中断为一个多项式，这就要求 α 必须等于一个负整数 $-n_r(n_r=0,1,2,\cdots)$，亦即

$$(J'_n+1)-\beta=-n_r\qquad(n_r=0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

把(12)式代入(8)式，得能谱方程为

$$E^2-M^2=-\frac{(MZ_s+EZ_v)^2}{N_n^2}, \tag{13}$$

式中

$$N_n=J'_n+n_r+1=\begin{cases}J_{n-2}+n_r+(n-1)/2 & (Z_s=Z_v=Z),\\ \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[J_{n-2}+(n-1)/2][J_{n-2}+(n-3)/2]+4(Z_s^2-Z_v^2)}+1+2n_r\right] & (Z_s\neq Z_v)\end{cases}\qquad(n_r=0,1,2,\cdots). \tag{14}$$

因此，当标量势等于矢量势时，能谱方程为

$$E^2-M^2=-\frac{Z^2(M+E)^2}{[J_{n-2}+n_r+(n-1)/2]^2}\qquad(n_r=0,1,2,\cdots). \tag{15}$$

当标量势不等于矢量势时，能谱方程为

$$E^2-M^2=-\frac{4(MZ_s+EZ_v)^2}{[\sqrt{1+4[J_{n-2}+(n-1)/2][J_{n-2}+(n-3)/2]+4(Z_s^2-Z_v^2)}+1+2n_r]^2}\quad(n_r=0,1,2,\cdots).\tag{16}$$

而径向波函数

$$u_{N_nJ'_n}(r)=C_{N_nJ'_n}\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right)^{J'_n+1}\times\exp\left[-\frac{(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right]F\left(-n_r,2J'_n+2,\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right),\tag{17}$$

式中 $C_{N_nJ'_n}$ 为归一化常数，N_n 和 J'_n 分别由(14)和(6)式确定. 利用合流超几何函数和广义拉盖尔多项式的关系[28,29]

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!\Gamma(\alpha+1)}F(-n,\alpha+1,x),\tag{18}$$

以及广义拉盖尔多项式的正交归一性和递推关系[28,29]

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{mn},\tag{19}$$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x),\tag{20}$$

得归一化常数

$$C_{N_nJ'}=\frac{1}{\Gamma(2J'_n+2)N_n}\times\sqrt{(MZ_s+EZ_v)\frac{\Gamma(n_r+2J'_n+2)}{n_r!}}.\tag{21}$$

所以归一化径向波函数为

$$u_{N_nJ'_n}(r)=\frac{1}{\Gamma(2J'_n+2)N_n}\times\sqrt{(MZ_s+EZ_v)\frac{\Gamma(n_r+2J'_n+2)}{n_r!}}\times\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right)^{J'_n+1}\times\exp\left[-\frac{(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right]F\left(-n_r,2J'_n+2,\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right),\tag{22}$$

或者用广义拉盖尔多项式表示成

$$u_{N_nJ'_n}(r)=\frac{1}{N_n}\sqrt{(MZ_s+EZ_v)\frac{n_r!}{\Gamma(n_r+2J'_n+2)}}\times\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right)^{J'_n+1}\exp\left[-\frac{(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right]\times L_{n_r}^{(2J'_n+1)}\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)r}{N_n}\right),\tag{23}$$

式中 N_n 和 J'_n 分别由(14)和(6)式确定.

3. 平均值的递推关系与解析表达式

上面获得了具有 n 维氢原子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的精确解，给出了精确的能谱方程和归一化的解析波函数. 为了将此结果应用于实际问题，下面对不同幂次的径向平均值进行计算. 由(21)和(22)式，径向平均值为

$$\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle=\int_0^\infty u_{N_nJ'_n}(r)u_{N_nJ'_n}(r)r^p dr=[C_{N_nJ'_n}]^2\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}\right)^{2J'_n+2}\times\int_0^\infty r^{2J'_n+2+p}\exp\left[-\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}r\right]\times\left[F\left(-n_r,2J'_n+2,\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}r\right)\right]^2dr.\tag{24}$$

利用含有合流超几何函数的积分公式[25]

$$A_v=\int_0^\infty e^{-kz}z^{v-1}[F(-n,\gamma,kz)]^2dz,\tag{25}$$

式中 n 为一个正整数，并且 $\mathrm{Re}v>0$，以保证积分收剑. 利用(25)式，(24)式可改写为

$$\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle=[C_{N_nJ'_n}]^2\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}\right)^{2J'_n+2}A_{2J'_n+3+p},\tag{26}$$

式中 $k=\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}$，$v=2J'_n+3+p$，$\gamma=2J'_n+2$. 积分 A_v 之间具有以下关系[25]：

$$A_{\gamma+s}=\frac{(\gamma-s-1)(\gamma-s)\cdots(\gamma+s-1)}{k^{2s+1}}A_{\gamma-s-1},\tag{27}$$

式中 s 为任意整数.在(27)式中令 $s=p+1$,则有

$$A_{2J'_n+3+p}=\frac{(2J'_n-p)(2J'_n+1-p)\cdots(2J'_n+2+p)}{(2(MZ_s+EZ_v)/N_n)^{2p+3}}\times A_{2J'_n-p}, \tag{28}$$

仿照(26)式,径向平均值

$$\langle N_nJ'_n|r^{-p-3}|N_nJ'_n\rangle=[C_{N_nJ'_n}]^2\left(\frac{2(MZ_s+EZ_v)}{N_n}\right)^{2l'+2}A_{2J'_n-s}. \tag{29}$$

由(26)和(29)式以及(28)式,即得正负幂次径向平均值之间所满足的递推关系

$$\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle=\frac{(2J'_n-p)(2J'_n-p+1)\cdots(2J'_n+p+2)}{[2(MZ_s+EZ_v)/N_n]^{2p+3}}\times\langle N_nJ'_n|r^{-p-3}|N_nJ'_n\rangle. \tag{30}$$

下面推导不同幂次径向平均值之间所满足的另一个递推关系.对于状态 $N_nJ'_n$,把(13)式代入(7)式,得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left\{-\frac{(MZ_s+EZ_v)^2}{N_n^2}+2(MZ_s+EZ_v)\frac{1}{r}-\frac{J'_n(J'_n+1)}{r^2}\right\}u_{N_nJ'_n}(r)=0. \tag{31}$$

用 $r^pu_{N_nJ'_n}(r)$ 乘以(31)式各项,并积分 $\int_0^\infty\cdots\mathrm{d}r$.方括号内的三项显然是 r^p,r^{p-1} 和 r^{p-2} 的平均值.而第一项分部积分二次,得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty r^pu_{N_nJ'_n}(r)\frac{\mathrm{d}^2u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r^2}\\&=r^pu_{N_nJ'_n}(r)\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\Big(r^p\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}+pr^{p-1}u_{N_nJ'_n}(r)\Big)\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\\&=\Big[r^pu_{N_nJ'_n}(r)\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}-\frac{P}{2}r^{p-1}(u_{N_nJ'_n}(r))^2\Big]\Big|_0^\infty+\frac{p(p-1)}{2}\langle N_nJ'_n|r^{p-2}|N_nJ'_n\rangle\\&\quad-\int_0^\infty r^p\left(\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{32}$$

如果 p 的取值满足

$$r^pu_{N_nJ'}(r)\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'}(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_0^\infty=0,\quad r^{p-1}(u_{N_nJ'}(r))^2\Big|_0^\infty=0, \tag{33}$$

则就有下列结果:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty r^p\left(\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\\&=-\left(\frac{MZ_s+EZ_v}{N_n}\right)^2\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle+2(MZ_s+EZ_v)\langle N_nJ'_n|r^{p-1}|N_nJ'_n\rangle\\&\quad+\left[\frac{p(p-1)}{2}-J'_n(J'_n+1)\right]\times\langle N_nJ'_n|r^{p-2}|N_nJ'_n\rangle.\end{aligned} \tag{34}$$

再用 $r^{p+1}\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}$ 乘以(31)式各项,并积分 $\int_0^\infty\cdots\mathrm{d}r$,所有各项分部积分一次,并注意利用(33)式,结果得

$$\begin{aligned}&(p+1)\int_0^\infty r^p\left(\frac{\mathrm{d}u_{N_nJ'_n}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\\&=(p+1)\left(\frac{MZ_s+EZ_v}{N_n}\right)^2\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle-2p(MZ_s+EZ_v)\langle N_nJ'_n|r^{p-1}|N_nJ'_n\rangle\\&\quad+J'_n(J'_n+1)(p-1)\langle N_nJ'_n|r^{p-2}|N_nJ'_n\rangle.\end{aligned} \tag{35}$$

对比(34)与(35)式,即得不同幂次径向平均值之间满足的另一个递推关系为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{MZ_s+EZ_v}{N_n}\right)^2\langle N_nJ'_n|r^p|N_nJ'_n\rangle\\&=\frac{2p+1}{p+1}(MZ_s+EZ_v)\langle N_nJ'_n|r^{p-1}|N_nJ'_n\rangle-\frac{p[(2J'_n+1)^2-p^2]}{4(p+1)}\langle N_nJ'_n|r^{p-2}|N_nJ'_n\rangle.\end{aligned} \tag{36}$$

反复使用(30)和(36)式,并注意到 $\langle N_nJ'_n|N_nJ'_n\rangle=1$,就可以得到任意幂次径向平均值的解析表达式.部分结果如下:

$$\begin{aligned}\langle N_nJ'_n|r^3|N_nJ'_n\rangle=&\frac{(N_n)^2}{8(MZ_s+EZ_v)^3}\{35(N_n)^4-(N_n)^2[30J'_n(J'_n+1)-25]\\&+3(J'_n-1)J'_n(J'_n+1)(J'_n+2)\},\end{aligned} \tag{37}$$

$$\langle N_n J'_n | r^2 | N_n J'_n \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{N_n}{MZ_s + EZ_v}\right)^2 \times [5(N_n)^2 - 3J'_n(J'_n + 1) + 1], \tag{38}$$

$$\langle N_n J'_n | r | N_n J'_n \rangle = \frac{3N_n^2 - J'_n(J'_n + 1)}{2(MZ_s + EZ_v)}, \tag{39}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-1} | N_n J'_n \rangle = \frac{MZ_s + EZ_v}{N_n^2}, \tag{40}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-2} | N_n J'_n \rangle = (MZ_s + EZ_v)^2 \frac{2}{N_n^3(2J'_n + 1)}, \tag{41}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-3} | N_n J'_n \rangle = \left(\frac{MZ_s + EZ_v}{N_n}\right)^3 \times \frac{8}{2J'_n(2J'_n + 1)(2J'_n + 2)}, \tag{42}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-4} | N_n J'_n \rangle = \frac{1}{2N_n^5}(MZ_s + EZ_v)^4 \times \frac{3N_n^2 - J'_n(J'_n + 1)}{(J'_n - 1/2)J'_n(J'_n + 1/2)(J'_n + 1)(J'_n + 3/2)}, \tag{43}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-5} | N_n J'_n \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{MZ_s + EZ_v}{N_n}\right)^5 \times \frac{5N_n^2 - 3J'_n(J'_n + 1) + 1}{(J'_n - 1)(J'_n - 1/2)J'_n(J'_n + 1/2)(J'_n + 1)(J'_n + 3/2)(J'_n + 2)}, \tag{44}$$

$$\langle N_n J'_n | r^{-6} | N_n J' \rangle = \frac{1}{8N_n^7}(MZ_s + EZ_v)^6 \times \frac{35N_n^4 - N_n^2[30J'_n(J'_n + 1) - 25] + 3(J'_n - 1)J'_n(J'_n + 1)(J'_n + 2)}{(J'_n - 3/2)(J'_n - 1)(J'_n - 1/2)J'_n(J'_n + 1/2)(J'_n + 1)(J'_n + 3/2)(J'_n + 2)(J'_n + 5/2)}, \tag{45}$$

式中 N_n 和 J'_n 分别由(14)和(6)式确定.

4.讨　　论

本文严格求解了具有 n 维氢原子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程束缚态的精确解,获得了精确的能谱方程和归一化的解析波函数.给出了径向平均值的两个递推关系和部分径向平均值的解析表达式.虽然对于大多数势场人们已经证明只有当标量势大于等于矢量势时,才能有束缚态存在[30—33],但本文和文献[16,33—35]的工作说明,n 维氢原子势显然是一个特例.在三维情况下,文献[16,33—35]的工作表明,仅有氢原子型矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程是有束缚态解存在的,而本文的工作则进一步说明,无论是 n 维氢原子型标量势大于等于矢量势还是小于等于矢量势,Klein-Gordon 方程的束缚态精确解总是存在的.

[1] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[2] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[3] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201(in Chinese)[胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[4] Hu S H and Chen C Y 1996 *J. Fudan University* (Natural Science) **35** 578(in Chinese)[胡嗣柱、陈昌远 1996 复旦学报(自然科学版) **35** 578]

[5] Chen C Y and Sun G Y 1997 *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni* (Natural Science) **36** 34(in Chinese)[陈昌远、孙国耀 1997 中山大学学报(自然科学版) **36** 34]

[6] Hu S H and Chen C Y 1998 *J. Fudan University* (Natural Science) **37** 713(in Chinese)[胡嗣柱、陈昌远 1998 复旦学报(自然科学版) **37** 713]

[7] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999(in Chinese)[侯春风、李　炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[8] Hou C F and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561

[9] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651(in Chinese)[陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[10] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453(in Chinese)[郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[11] Su R K and Zhang Y 1984 *J. Phys.* A **17** 851
[12] Su R K, Yang Z Y and Chen T 1988 *J. Phys.* A **21** L593
[13] Su R K, Zhong Y and Hu S H 1991 *Chin. Phys. Lett.* **8** 114
[14] Nogami Y and Toyama F M 1993 *Phys. Rev.* A **47** 1708
[15] Ran Y Q, Xue L H and Hu S Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2435 (in Chinese) [冉扬强、薛立徽、胡嗣柱 2002 物理学报 **51** 2435]
[16] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* vol Ⅱ 2nd ed (Beijing: Science Press) ch 7, ch 9 (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学(卷Ⅱ) 第2版(北京 科学出版社)第7章和第9章]
[17] Liu Y F, Lei Y A and Zeng J Y 1997 *Phys. Lett.* A **231** 9
[18] Liu Y F and Zeng J Y 1997 *Sci. China* A **40** 1110
[19] Chen C Y 2000 *Chin. Phys.* **9** 731
[20] Nieto M M 1979 *Am. J. Phys.* **47** 1067
[21] Qian Y K and Zeng J Y 1993 *Sci. China* A **36** 595
[22] Hou C F, Zhou Z X and Yuan B H 2000 *Chin. J. Atomic Molecular Phys.* **17** 129 (in Chinese) [侯春风、周忠祥、袁保红 2000 原子与分子物理学报 **17** 129]
[23] Chen C Y and Sun D S 2001 *Chin. J. Atomic Molecular Phys.* **18** 105 (in Chinese) [陈昌远、孙东升 2001 原子与分子物理学报 **18** 105]
[24] Chen C Y, Sun D S, Liu Y W and Liu C L 2002 *Chin. J. Atomic Molecular Phys.* **19** 201 (in Chinese) [陈昌远、孙东升、刘友文、刘成林 2002 原子与分子物理学报 **19** 201]
[25] Landau L D and Lifshitz E M 1979 *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)* 3rd ed (New York: Pregamon) § 36
[26] Liu Y F and Zeng J Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 428 (in Chinese) [刘宇峰、曾谨言 1997 物理学报 **46** 428]
[27] Chen C Y, Sun D S, Liu C L and Lu F L 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 781 (in Chinese) [陈昌远、孙东升、刘成林、陆法林 2003 物理学报 **52** 781]
[28] The Written Group of Mathematical Handbook 1979 *Mathematical Handbook* (Beijing: Higher Education Press) p610 (in Chinese) [《数学手册》编写组 1979 数学手册(北京:高等教育出版社)第610页]
[29] Wang Z X and Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) p361—365 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论(北京 科学出版社)第361—365页]
[30] Long C and Robson D 1983 *Phys. Rev.* D **27** 644
[31] Fishbanc P M and Gasiorowicz S G 1983 *Phys. Rev.* D **27** 2433
[32] Su R K and Ma Z Q 1986 *J. Phys.* A **19** 1739
[33] Ni G J and Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanics* (Shanghai: Fudan University Press) ch 9 (in Chinese) [倪光炯、陈苏卿 2000 高等量子力学(上海:复旦大学出版社)第9章]
[34] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* 3nd ed (New York: McGraw Hill) ch 13
[35] Qian B C and Zeng J Y 1988 *The Carefully Chosen Quantum Mechanics Problems and Their Analyses* (Beijing: Science Press) ch16 (in Chinese) [钱伯初、曾谨言 1988 量子力学习题精选与剖析(北京 科学出版社)第16章]

Bound states of the Klein-Gordon equation with *n*-dimensional scalar and vector hydrogen atom-type potentials*

Chen Chang-Yuan Liu Cheng-Lin Lu Fa-Lin Sun Dong-Sheng

(*Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng* 224002, *China*)

(Received 21 October 2002; revised manuscript received 26 November 2002)

Abstract

Characteristics of the bound states of Klein-Gordon equation with n-dimensional scalar and vector hydrogen atom-type potentials have been studied, the exact solutions of bound states are obtained. The exact energy expressions and the normalized analytically wave functions for bound states are presented. Two recurrence formulas and some explicit expressions for lower power radial average values are also derived.

Keywords: n-dimensional hydrogen atom-type potential, Klein-Gordon equation, bound states, exact solutions

PACC: 0365, 1110Q, 1240Q

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Jingsu Province, China (Grant No. 02KJB140007), and the Special Foundation of Yancheng Teachers College, China.