第 52 卷 第 7 期 2003 年 7 月
1000-3290/2003/52(07)/1585-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52,No.7,July,2003

理想流体球的爱因斯坦场方程内部严格解研究*

钟鸣乾
(西北大学物理系,西安 710069)

(2002 年 6 月 28 日收到;2002 年 12 月 3 日收到修改稿)

当静态的具有球对称性的理想流体的密度是径向坐标的函数时,Oppenheimer-Volkoff(OV)方程成为 Riccati 方程.根据 OV 方程的一个已知特解,能将它变换成可积分的 Bernoulli 方程,严格地求得 OV 方程的通解和另一特解,进一步得到理想流体球的爱因斯坦场方程的内部严格解,即度规分量的解析表示式.

关键词:爱因斯坦场方程,OV 方程,理想流体球内部严格解
PACC:0420

1. 引　　言

理想流体组成的静态的球对称的物质分布(本文简称理想流体球)是广义相对论中基本的简单模型,是典型的经典问题之一.关于理想流体球的爱因斯坦场方程,早已得到著名的 Schwarzschild 解,已有许多论述、讨论和研究.并且与观测实验的检验联系起来,取得了某些成功.但由于实际具体问题的多样性和复杂性,因此有关这个经典问题并非就此解决了.近来,某些学者从不同方面继续进行具体的研究[1,2].爱因斯坦场方程的求解,在满足球对称性理想流体的条件下,其内部解仍与表示状态的物理量有关,有多种情况.Tolman 从数学观点,系统地研究过理想流体球在 8 种情况下爱因斯坦场方程内部解的解析表示式.然而在解方程时,Tolman 提出了关于引力场的度规张量分量 $g_{00}=-e^{\nu}$,$g_{11}=e^{\lambda}$ 的有关附加的假设方程[3].这带有猜测性.与此同时,Oppenheimer 和 Volkoff 从物理观点出发,将理想流体球与星体结构联系起来,建立了中子星的理论模型[4],导出了广义相对论流体静力学球对称星体结构的微分方程,现称为 Oppenheimer-Volkoff(OV)方程.(实际上 Tolman 已导出过该方程,故又称 TOV 方程.)求解理想流体球爱因斯坦场方程的内部解就与求解 OV 方程联系在一起.OV 方程和爱因斯坦场方程都是非线性方程.当球的密度是常量时易求得 OV 方程的严格(精确)解,并得到爱因斯坦场方程的 Schwarzschild 内部解.当密度为径向坐标的函数时,只是在某些特殊情况下用适当方法和技巧,求上述方程的严格解;一般情况下不能求得严格解,通常根据物理条件求近似解和数值解.Chandrasekhar 在天体物理中研究白矮星结构,后在上述有关广义相对论的框架内研究星体结构理论取得了成功[5].Misner 和 Zapolsky 求得了 OV 方程的严格解[6,7],但该解在边界表面(球面)上的压强不等于零.本文从数学上考虑 OV 方程的性质,当密度和压强是径向坐标的函数时,该方程可简化为 Riccati 方程和 Bernoulli 方程.这两方程是微分方程理论中已知的经典的非线性方程[8].根据 OV 方程的已知特解,将该方程变换为容易积分的 Bernoulli 方程,因而严格地求得 OV 方程的通解和在边界面上满足压强等于零的特解;进一步求出理想流体球的爱因斯坦场方程的一个严格的内部解,即度规分量的解析表示式.这实际上与 Tolman 附加的假设方程 $g_{11}=e^{\lambda}=$ 常量得到的一些结果是一致的[3].所以,从数学上考虑,本文的具体方法将是关于 Tolman 的一种结果的一个简单而严格的证明.这有助于对广义相对论的理解和解释及关于星体内部结构的探讨.

* 中国科学技术大学天体物理和宇宙学基金资助的课题.

2. OV 方程的严格解

OV 方程可以写成(SI 单位制)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{4\pi Gr^3/c^4}{r^2(1-2Gm/c^2r)}p^2+\frac{(Gm+4\pi Gr^3\rho)/c^2}{r^2(1-2Gm/c^2r)}p+\frac{Gm\rho}{r^2(1-2Gm/c^2r)}=0,\tag{1}$$

其中 G 为引力常数,c 为光速,r 为径向坐标,p 为压强,ρ 为密度,m 为半径 r 的球内质量,p,ρ,m 均为 r 的函数.质量方程为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}=4\pi r^2\rho.\tag{2}$$

边界面上压强 $p(R)$满足条件

$$p(R)=0,\tag{3}$$

R 为流体球(或天体)半径.

Misner 和 Zapolsky 利用物态方程 $p=(\gamma-1)\rho c^2$,$\gamma=4/3$,找到方程(1)和(2)的严格解[6,7]

$$\rho=\frac{3c^2}{56\pi Gr^2},\tag{4}$$

$$m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)\mathrm{d}r=\frac{3c^2}{14G}r,\tag{5}$$

$$p_1=\frac{c^4}{56\pi Gr^2}.\tag{6}$$

然而在边界面上压强不满足(3)式,即 $p_1(R)=c^4/56\pi GR^2\neq 0$.采用以下方法可求出满足边界条件 $p(R)=0$ 的 OV 方程的严格解:

将(4)和(5)式代入(1)式,给出

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{7\pi Gr}{c^4}p^2+\frac{3}{4r}p+\frac{9c^4}{448\pi Gr^3}=0.\tag{7}$$

(7)式为 Riccati 方程,根据它的性质及(5)和(6)式,作变换

$$p=p_1+y=\frac{c^4}{56\pi Gr^2}+y,\tag{8}$$

(7)式可写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}+\frac{7\pi Gr}{c^4}y^2+\frac{1}{r}y=0.\tag{9}$$

(9)式为 Bernoulli 方程,它的解为

$$\frac{1}{y}=\exp\left(\int_R^r\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)\left[C_R+\int_R^r\frac{7\pi Gr}{c^4}\times\exp\left(-\int_R^r\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)\mathrm{d}r\right].\tag{10}$$

根据(8)和(10)式,得到

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{p-p_1}=\frac{r}{R}C_R+\frac{7\pi Gr}{c^4}(r-R),\tag{11}$$

式中 C_R 为积分常数.根据(8)和(11)式,得到 OV 方程的通解为

$$p=\frac{1}{\frac{r}{R}C_R+\frac{7\pi Gr}{c^4}(r-R)}+\frac{c^4}{56\pi Gr^2}.\tag{12}$$

设 $r=R$,利用边界条件(3)式,能确定 C_R.

$$C_R=-56\pi GR^2/c^4.\tag{13}$$

因此就找到了边界上满足条件 $p(R)=0$ 的 OV 方程的严格解

$$p(r)=\frac{c^4}{7\pi Gr^2-63\pi GRr}+\frac{c^4}{56\pi Gr^2}=\frac{9c^4(R-r)}{56\pi Gr^2(9R-r)}.\tag{14}$$

从(4)和(14)式就可给出物态方程

$$p=\frac{3c^2(R-r)}{9R-r}\rho=\frac{3c^2[R-(3c^2/56\pi G\rho)^{1/2}]\rho}{9R-(3c^2/56\pi G\rho)^{1/2}}.\tag{15}$$

当 $r=R$ 时,从(5)式得到

$$M=\frac{3c^2R}{14G},\quad \frac{2GM}{c^2R}=\frac{3}{7}<\frac{8}{9},\tag{16}$$

M 为流体球的总质量.

3. 理想流体球爱因斯坦场方程的内部严格解

根据上述 OV 方程的解,易求出理想流体球的爱因斯坦场方程的严格解,即表示时空和引力场性质的度规张量分量的表示式.

已知理想流体球的度规的时空间隔线元的标准形式为[7]

$$c^2\mathrm{d}\tau^2=B(r)c^2\mathrm{d}t^2-A(r)\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\tag{17}$$

$$g_{00}=-B(r),\quad g_{11}=A(r),$$

$$g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,$$

$$g_{\mu\nu}=0(\mu\neq\nu),$$

其中

$$A(r)=\left[1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}\right]^{-1},\tag{18}$$

$$B(r)=\exp\left\{-\int_r^\infty\frac{2G}{c^2r^2}\left[m(r)+\frac{4\pi r^3p(r)}{c^2}\right]\times\left[1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}\right]^{-1}\mathrm{d}r\right\}.\tag{19}$$

在球外部(真空),已知

$$\rho(r)=0,\quad p(r)=0,\tag{20}$$

$$m(r) = M = \frac{3c^2 R}{14G}, \quad R = \frac{14GM}{3c^2}, \tag{21}$$

$$A(\infty) = B(\infty) = 1, \tag{22}$$

将(5),(14),(20)和(21)式代入(18)式,立即可写出球内、外的 $A(r)$表示式 这些式代入(19)式,积分易被计算出.这样,就得到 $A(r)$和 $B(r)$简明的解析表示式.

在球外部,$r \geqslant R$,给出

$$A_0(r) = \frac{7r}{7r - 3R} = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]^{-1}, \tag{23}$$

$$B_0(r) = \frac{7r - 3R}{7r} = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right], \tag{24}$$

表明 $A_0(r)$和 $B_0(r)$与 Schwarzschild 外部解相同,与 Birkhoff 定理一致.

在球内部,$R \geqslant r \geqslant 0$,得到

$$A_i(r) = \frac{7}{4}, \tag{25}$$

$$B_i(r) = \frac{r(9R - r)^2}{112R^3} = \frac{r^3\left[\frac{42GM}{c^2 r} - 1\right]^2}{112R^3}, \tag{26}$$

表明理想流体球的内部解表示式 $A_i(r)$和 $B_i(r)$与 Schwartzschild 内部解不同,是又一种情况的内部严格解.

在边界球面上,$r = R$,就有

$$A_0(R) = A_i(R) = \frac{7}{4}, \tag{27}$$

$$B_0(R) = B_i(R) = \frac{4}{7}, \tag{28}$$

表明理想流体球严格的外部解和内部解在边界上是连续的、可以衔接的,而且满足 $A(R)B(R) = 1$.

4. 讨 论

1. 关于 OV 方程的解,本文利用文献[6]的结果,于是两者的密度、质量表示式相同,但是边界条件不同,所以两者所得到的压强、物态方程的表示式不同.

本文得到的(14),(15),(25)和(26)式,与 Tolman 附加假设方程 $e^{-\lambda}$ = 常量所得到的结果实际上是一致的,但两者所用的方法技巧不同.本文的方法体现着广义相对论中寻求场方程严格解的生成技术[9].本文没有关于度规分量的附加假设方程,而是利用 OV 方程的一个已知特解,作适当变换将 OV 方程简化,求出通解和新的特解,再严格地得到度规分量的解析表示式,给出了一种具体方法和技巧.

2. 文献[6]关于 OV 方程的严格解,本文利用这条件,密度与 r^2 成反比.严格定量而言,当然与星体实际情况不相符合.然而,一般星体的密度是从中心向外逐步减小(静能密度或压强也是如此),这与实际情况大致定性相符合.该严格解应是有物理意义的.在 $r = 0$,$\rho \to \infty$,$p \to \infty$,即 $r = 0$ 是奇点.文献[5—7]中已有分析讨论.如果采用既简单又较接近实际的模型,求近似解或数值解,可能给出有实际意义的结果.在 $r = 0$,度规分量 $g_{\mu\nu}$ 和质量 $m(r)$ 不出现奇性,而且天体质量可以测量,所以质量更能反映天体的广义相对论性质.

3. 对于理想流体球这一非常简单的模型,爱因斯坦场方程的严格内部解比外部解更具有复杂性和多样性,于是从广义相对论研究天体的内部结构、时空性质和引力场,是一个远未解决的问题,也是一个难题,今后仍需深入具体探索.但也只能从一些较简单的具体模型着手.广义 Schwarzschild 几何[10]应是其中方法之一.

[1] Essen H 1998 *Int. J. Theor.* **37** 875

[2] Chen G 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 197(in Chinese)[陈 光 2002 物理学报 **51** 197]

[3] Tolman R C 1939 *Phys. Rev.* **55** 364

[4] Oppenheimer J R and Volkoff G M 1939 *Phys. Rev.* **55** 374

[5] Chandrasekhar S 1984 *Rev. Mod. Phys.* **56** 137

[6] Misner C W and Zapolsky H S 1964 *Phys. Rev. Lett.* **12** 635

[7] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology*(New York :Wiley)chap 11

[8] Liu S K and Liu S D 2000 *Nonlinear Equation in Physics*(Beijing : Peking University Press) chap 2(in Chinese)[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京 :北京大学出版社)第 2 章]

[9] Wang Y J and Tang Z M 1990 *The Theory and Effects of Gravitation*

(Changsha :Hunan Science and Technology Press) p252 (in Chinese) [王永久、唐智明 1990 引力理论和引力效应(长沙 湖南科学技术出版社)第252页]

[10] Li X Z, Yuan N Y, Liu D J and Hao J G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1031 (in Chinese) [李新洲、袁宁一、刘道军、郝建纲 2000 物理学报 **49** 1031]

Inquiry about the exact interior solution to Einstein field equation for a perfect fluid sphere*

Zhong Ming-Qian

(*Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China*)

(Received 28 June 2002; revised manuscript received 3 December 2002)

Abstract

When the density of a static spherically symmetric perfect fluid is a function of the radial coordinate, the Oppenheimer-Volkoff (OV) equation turns into a Riccati equation. If a particular solution of the OV equation is given, it can be transformed into an integrable Bernoulli equation, we can obtain a general exact solution and an other particular solution of the OV equation. Further more, the exact interior solutions of Einstein field equation for the perfect fluid sphere are also obtained, i.e. the analytical expressions of the metric components.

Keywords: Einstein field equation, Oppenheimer-Volkoff equation, exact interior solution for the perfect fluid sphere

PACC: 0420

* Project supported by the Foundation of Astrophysics and Cosmology from the University of Science and Technology of China.