

# 脉冲驱动离散混沌系统同步的 实验与理论研究<sup>\*</sup>

陈菊芳<sup>1)</sup> 张入元<sup>2)</sup> 彭建华<sup>1,3)</sup>

<sup>1)</sup> 东北师范大学物理系, 长春 130024)

<sup>2)</sup> 东北师范大学数学系, 长春 130024)

<sup>3)</sup> 深圳大学理学院, 深圳 518060)

(2002 年 6 月 27 日收到, 2002 年 10 月 14 日收到修改稿)

设计了一个具有混沌和超混沌特性的二维离散混沌系统, 对其动力学特征进行了分析, 从电路实验上实现了脉冲驱动离散混沌系统的同步, 用数学方法进行分析, 从理论上给出系统实现脉冲同步的条件, 实验结果与理论分析和数值计算结果一致. 另外, 还考虑到弱噪声影响, 实验结果表明: 脉冲同步方法仍能保持电路系统的混沌同步, 说明系统具有一定的鲁棒性.

关键词: 脉冲同步, 离散系统, 电路实验

PACC: 0545

## 1. 引言

混沌同步在保密通讯方面的应用已成为混沌应用研究的重要课题之一. 按照 Pecora 和 Carroll 的驱动-响应同步方案<sup>[1]</sup>, Cuomo 和 Oppenheim 提出用混沌遮掩通讯技术实现模拟信号的保密通讯, 并在电子线路中构造出这样的加密系统<sup>[2,3]</sup>. 实验中包含信息信号的驱动信号持续不断地被发送到接收系统, 按照这种方式, 为了保证发送和接收端混沌系统的同步, 使解调出来的信息信号失真小, 则要求信息信号的电平较混沌载波的电平要低, 然而这样就有可能被破译者通过预测的方法寻找到被遮掩的信号, 从而大大降低系统的保密性能. 虽然可以用文献 [4] 提出的超混沌同步系统提高加密系统的抗破译强度, 但只要仍采用驱动信号的持续作用, 就不可避免地存在限制信息信号幅值的条件.

最近, 有作者提出脉冲(或间歇)同步混沌的方案<sup>[5,6]</sup>, 即将持续驱动同步的信号分成两部分: 驱动同步部分和非驱动同步部分(对响应或接收系统而言, 也可称为自由演化部分), 只用非驱动同步区中

的混沌信号掩埋信息信号. 其研究结果表明: 采用脉冲同步的方式, 不仅可以实现混沌或超混沌系统的同步, 而且在有些情况下还可以使用持续驱动方式仍不能同步的系统实现同步; 更有实际意义的是在自由演化区中使用遮掩法对待加密的信息信号的幅度基本上没有要求; 并且由于混沌信号被间歇性地切断, 而使得作为密钥的混沌信号所包含的动力学特征减少, 从而有效地增加了抵御预测方法攻击的能力.

近几年有关脉冲同步的研究已有较多的报道<sup>[7-10]</sup>, 但绝大多数集中于数值计算方面, 不仅实验方面的报道少<sup>[11]</sup>, 尤其对离散系统的实验研究几乎没有, 而且从理论上进行解析分析的工作也极少<sup>[12-14]</sup>. 本文设计了一个具有混沌和超混沌特性的二维离散电路系统, 并基于主动-被动同步方案的基本思想<sup>[15]</sup>, 在这个电路中实现了脉冲同步混沌和超混沌. 另外, 还从理论上给出这个系统实现脉冲驱动同步混沌和超混沌的解析条件, 以及结合实验结果用数值计算方法进行了对照分析, 这些理论和数值结果都与实验结果符合得很好.

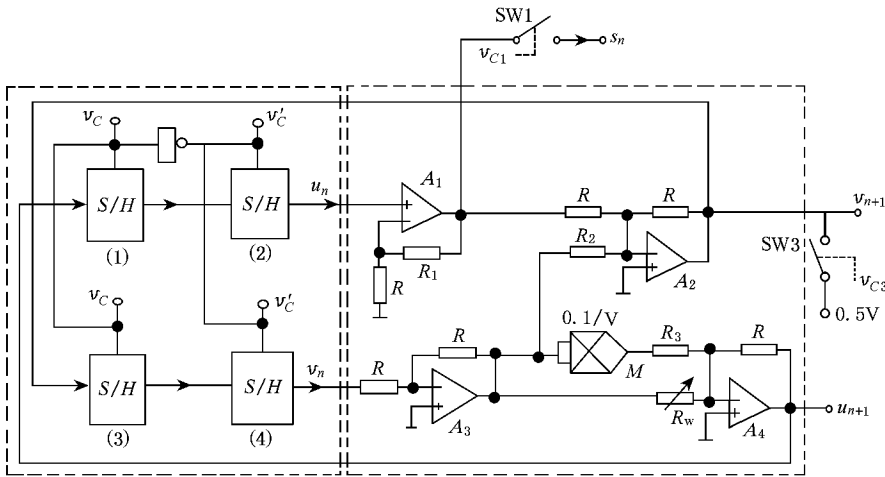
<sup>\*</sup> 国家教育部高等学校骨干教师资助计划(批准号 [2000] 65) 和国家教育部科学技术研究重点项目(批准号 [2000] D0042) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人.

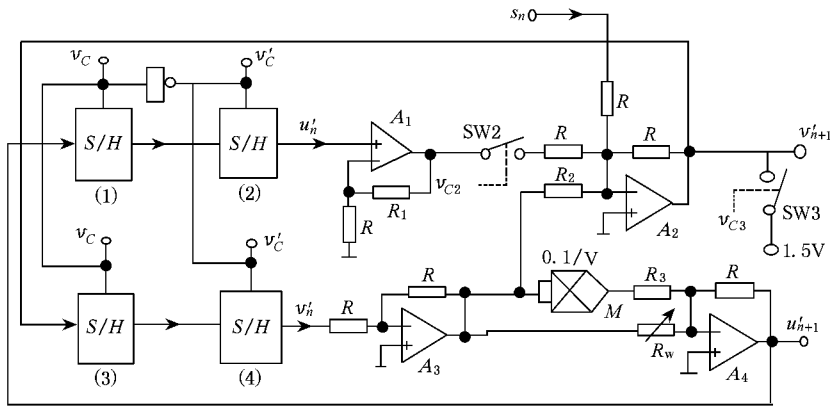
2. 离散混沌与超混沌电路

模拟电路( 右边虚线框内 )和离散化连续信号的电路( 左边虚线框内 )两部分构成. 图 1( a )电路的状态方程可写成

本文设计的离散电路如图 1( a )所示. 该电路由



( a )驱动电路



( b )响应电路

图 1 实验电路

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{R}{R_w} v_n - \frac{0.1R}{R_3} v_n^2, \\ v_{n+1} &= - \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right) u_n + \frac{R}{R_2} v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

实验中选择的各电阻阻值分别为  $R = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 100\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 5.1\text{k}\Omega$ , 而可变电阻  $R_w$  作为连续可调节的参量. 进一步令  $x_n = u_n$ ,  $y_n = v_n$ ,  $a = \frac{R}{R_w}$ ,  $d = \frac{0.1R}{R_3}$ ,  $b = 1 + \frac{R_1}{R}$ ,  $c = \frac{R}{R_2}$ , 则方程( 1 )简化成

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ay_n - dy_n^2, \\ y_{n+1} &= -bx_n + cy_n, \end{aligned} \tag{2}$$

其中  $d = 0.2$ ,  $b = 1.1$ ,  $c = 0.1$ ,  $a$  与  $R_w$  有反比关系, 因此将它作为方程( 2 )的可调参数.

3. 系统的主要动力学特征

对系统( 2 ),我们绘制出以  $a$  为调节参量的分岔图和在对同一参量范围的 Lyapunov 指数谱  $\Lambda_1(a)$ ,  $\Lambda_2(a)$ , 如图 2 所示. 对照图 2( a )和( b )可见, 随  $a$  的变化, 系统( 2 )经历不动点; 进入准周期运动; 再转变为 4 周期运动及生成一个倍周期分岔序列; 最后由这个倍周期分岔序列进入混沌和超混

沌状态. Lyapunov 指数谱中由  $a^{(i)}(i = 1, 2, 3, 4)$  分割的 5 个区间  $\Lambda_1(a), \Lambda_2(a)$  的取值情况刻划了系统呈现周期、准周期、混沌和超混沌特征. 由图 2(b) 可见,  $a$  在  $a^{(1)} - a^{(2)}$  区间的两个 Lyapunov 指数一个等于零, 另一个小于零, 这表明在此范围内系统的运动具有准周期特征. 当  $a > a^{(3)}$  且在  $a^{(3)} - a^{(4)}$  区间时, 有一个 Lyapunov 指数大于零, 这表明系统的状态是

混沌的.  $a > a^{(4)}$  之后, 两个 Lyapunov 指数均大于零, 此时系统的状态是超混沌的.

图 3(a) 和 (b) 分别给出系统处于超混沌态时, 实验观测和数值模拟的结果. 显然, 两种方法得到的结果基本一致. 实验是用数字示波器 (DS-8812) 观测图 1(a) 电路中的电压时域波形或  $(v_n, u_n)$  平面上的相图.

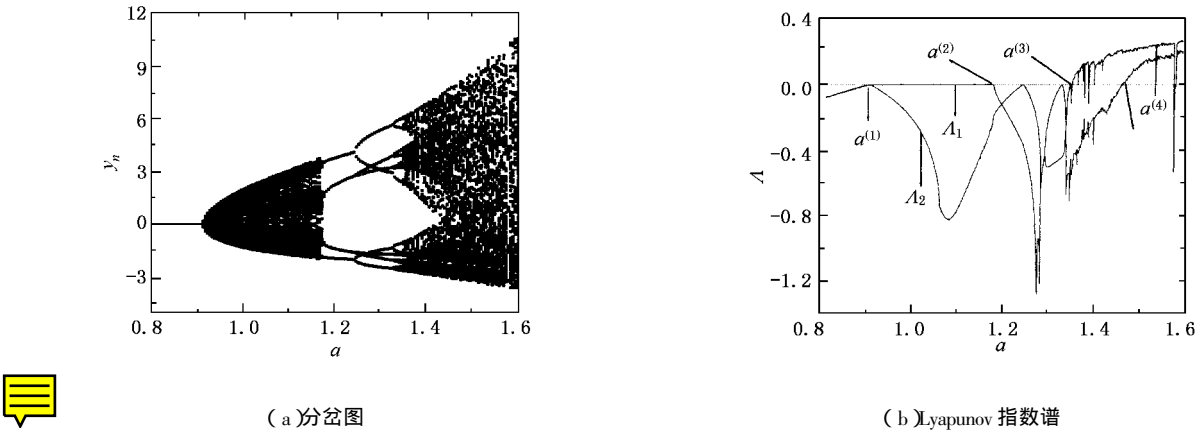


图 2 数值计算系统(2)的结果

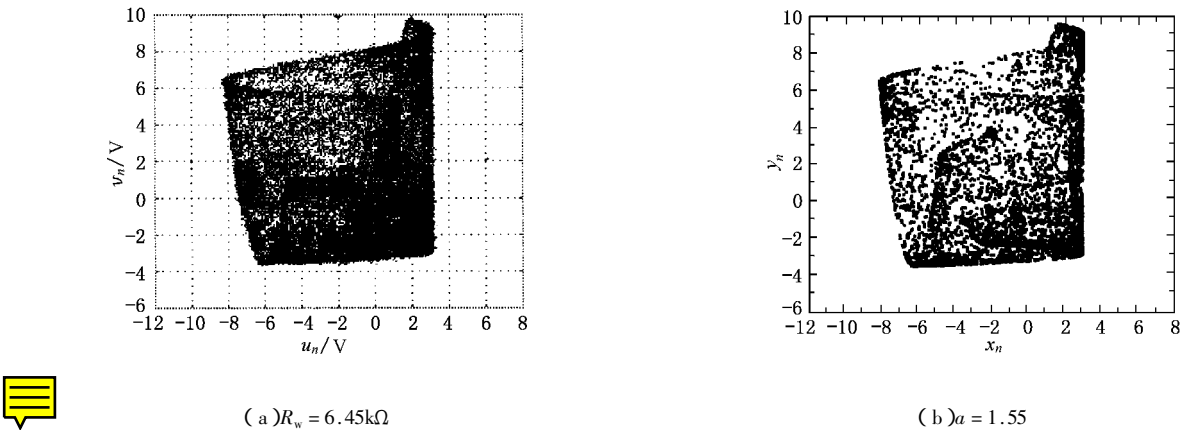


图 3 系统的超混沌吸引子 (a)为实验结果 (b)为数值计算结果

4. 同步电路及实验与数值计算结果

构成驱动(发送)和响应(接收)系统的电路分别如图 1(a)和(b)所示, 其中  $s_n$  为同步脉冲驱动信号, 其实现方式是利用一定的逻辑电路控制  $v_{C_1}$  和  $v_{C_2}$  ( $v_{C_2}$  为  $v_{C_1}$  的非逻辑), 使得开关 SW1 和 SW2 处于相反的开和关的工作状态.

由图 1(b) 响应电路的状态方程可写为

$$\begin{aligned} u'_{n+1} &= av'_n - dv_n'^2, \\ v'_{n+1} &= -s'_n + cv'_n, \end{aligned} \tag{3a}$$

或

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= ay'_n - dy_n'^2, \\ y'_{n+1} &= -s'_n(x_n, x'_n) + cy'_n, \end{aligned} \tag{3b}$$

其中

$$\begin{aligned} s'_n &= b\varphi(u_n, u'_n), \\ \varphi(u_n, u'_n) &= \begin{cases} u_n & n = mk, \\ u'_n & n \neq mk, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \text{ 只取 } 1, 3, 5. \end{aligned}$$

本文将报道当参量设置在  $a = 1.55$  ( $R_w = 6.45\text{k}\Omega$ ) 条件下, 亦即电路处于超混沌状态下, 脉冲驱动该系统同步的主要实验结果.

取  $m = 1$  ,这相当于响应系统被持续驱动 ,即  $s'_n = s_n$  .图 4 给出在同步过程中两个系统的信号差  $v'_n - v_n$  的演化特性 ,开始不为零的信号差量随着时间的演化而迅速趋于零 ,即超混沌系统达到同步 .

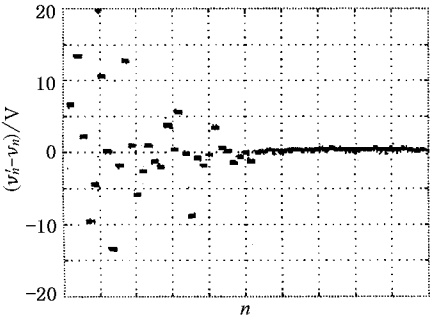


图 4  $m = 1$  的同步结果

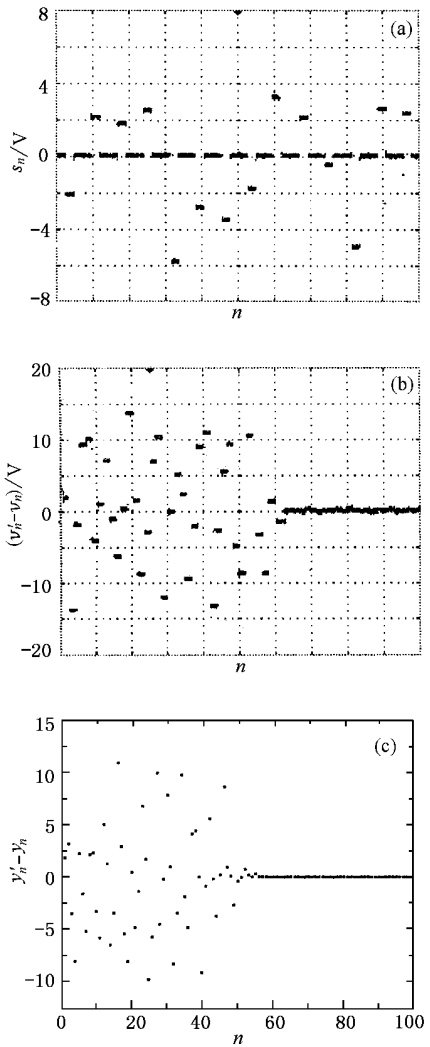


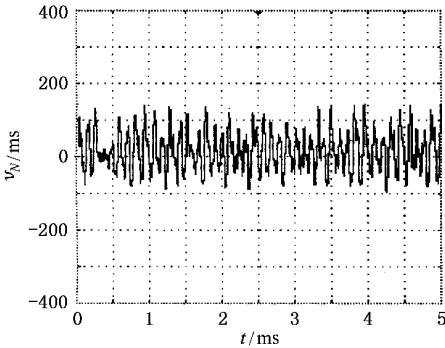
图 5  $m = 3$  的同步结果

取  $m = 3$  ,驱动信号  $s_n$  的波形如图 5 (a)所示 ,图中的脉冲信号具有 1:3 的占空比关系 .图 5 (b)为描述同步过程的信号差  $v'_n - v_n$  演化图 ,结果反映出两个系统可以达到同步 .对比图 5 (b)与图 4 可以看到 ,采用脉冲同步方式较持续同步方式达到同步稳态的时间要长 .图 5 (c)为与图 5 (b)相同参数条件下数值计算方程 2 和 3b 的结果 ,显然它与实验结果一致 .

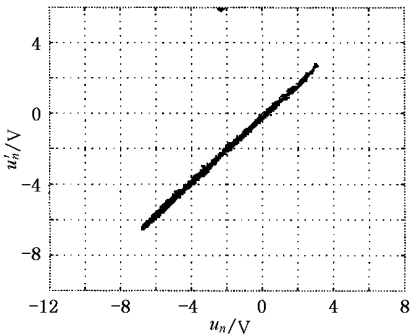
对于  $m = 5$  的情况 ,也得到了与  $m = 3$  相似的实验结果 ,只是同步达到稳定的过程较前面两种情况要更长 ,在此不再赘述 .

5. 噪声对脉冲同步的影响

把混沌同步应用于实际保密通讯中 ,需要考虑噪声干扰问题 .为了检测系统的抗干扰能力 ,实验中对驱动信号  $s(n)$  加入具有伪随机性质的超混沌信号<sup>[16]</sup>  $v_N(t)$  来模拟噪声信号 ,实验结果表明 ,无论是  $m = 1$  还是  $m = 3$  或 5 ,只要  $v_N(t)$  的幅值不超过 150mV ,驱动电路和响应电路均能达到同步 ,这说明脉冲同步方法在低噪声的影响下仍能正常工作 ,同步电路系统具有一定的鲁棒性 .图 6 (a)和 (b)分别



(a)模拟噪声信号的时域波形图



(b)  $u'_n - u_n$  相图

图 6 加入干扰信号后的实验结果

为  $m = 3$  ,即驱动信号每隔两个脉冲对响应系统进行驱动情况下 ,干扰信号  $v_N(t)$  的时域波形图和  $u'_n - u_n$  的相图 ,图 6(b)中  $u'_n$  和  $u_n$  仍构成  $45^\circ$  的对角线 ,说明系统是同步的 .

### 6. 脉冲驱动离散混沌系统的理论分析

以系统(2)作为驱动系统 ,将响应系统(3b)重写为

$$\begin{cases} x'_{n+1} = ay'_n - dy'^2_n, \\ y'_{n+1} = cy'_n - b\varphi_n(x_n, x'_n), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\varphi_n(x, x') = \begin{cases} x & n = 3k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ x' & n \neq 3k, \end{cases}$$

而  $a, b, c, d$  均为正数 . 本文只限于讨论  $m = 3$  的情况 .

在下面的讨论中 ,总是假设

$$(H1) \quad c < \min\{1 - \frac{1}{2}ab, \frac{1}{2}\},$$

$$(H2) \quad \mathcal{X}(ab + 1)c + \mathcal{X}(1 - 2c)c + c^3 < 1.$$

记 : 以  $z_0 = (x_0, y_0) \in R^2$  为初始值的系统(2)的解为

$$\begin{aligned} z_n(0, z_0) &= (x_n(0, z_0), y_n(0, z_0)), \\ n &= 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

以  $z'_0 = (x'_0, y'_0), z_0 = (x_0, y_0)$  为初值的系统(4)的解为

$$\begin{aligned} z'_n(0, z'_0, z_0) &= (x'_n(0, z'_0, z_0), y'_n(0, z'_0, z_0)), \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

若(H1)成立 ,令

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\frac{1-c}{db} \left( a + \frac{1-c}{b} \right), \\ c_{12} &= \frac{a^2}{4d}, \quad c_{21} = -\frac{a^2 b}{4d(1-c)}, \\ c_{22} &= \frac{1}{d} \left( a + \frac{1-c}{b} \right), \end{aligned}$$

定义  $D \subset R^2$  为

$$D = \{ (x, y) \in R^2, c_{11} \leq x \leq c_{12}, c_{21} \leq y \leq c_{22} \}. \quad (5)$$

定理 1 假设(H1)(H2)成立 ,则系统(4)与系统(2)可在闭区域  $D \subset R^2$  上实现同步 . 具体地 ,对任何  $z_0, z'_0 \in D$  ,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z'_n(0, z'_0, z_0) - z_n(0, z_0)| = 0. \quad (6)$$

注 : 对  $a \leq 1.6; b \leq 1.1; c \leq 0.11; d > 0$  (H1), (H2)均成立 .

为了证明定理 1 ,首先给出几个引理 :

引理 1 假设(H1)成立 ,则对任何  $z_0, z'_0 \in D$  ,有  $z_n(0, z_0) \in D, z'_n(0, z'_0, z_0) \in D, n = 1, 2, 3, \dots$  ,即  $D$  为系统(2)与系统(4)的不变集 .

引理 2 对任何  $z_0, z'_0 \in R^2$  和任意的正整数  $k$  ,有

$$\begin{aligned} & y'_{\mathcal{X}_{k+1}}(0, z'_0, z_0) - y_{\mathcal{X}_{k+1}}(0, z_0) \\ &= \theta_k(z_0, z'_0) [y'_{3k}(0, z'_0, z_0) - y_{3k}(0, z_0)] \quad (7), \\ & \theta_k(z_0, z'_0) = \{c^2 - 2ab - 2db^2 x_{3k}(0, z_0) \\ &+ db(1 + c) [y'_{3k}(0, z'_0, z_0) + y_{3k}(0, z_0)]\}c. \end{aligned} \quad (8).$$

由系统(2)和系统(4)不难得到证明 .

引理 3 假设(H1)和(H2)成立 ,则对任何  $z_0, z'_0 \in D$  ,有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y'_{3k}(0, z'_0, z_0) - y_{3k}(0, z_0)| = 0. \quad (9)$$

证明如下 :记

$$\theta = \mathcal{X}(ab + 1)c + \mathcal{X}(1 - 2c)c + c^3, \quad (10)$$

则由(H2)知  $\theta \in (0, 1)$  . 对任意的  $z_0, z'_0 \in D$  及正整数  $k$  ,由引理 1 知

$$\begin{aligned} c_{11} &\leq x_{3k}(0, z_0) \leq c_{12}; \\ c_{21} &\leq y'_{3k}(0, z'_0, z_0) \leq c_{22}; \\ c_{21} &\leq y_{3k}(0, z_0) \leq c_{22}, \end{aligned}$$

于是 ,由(8)式有

$$\begin{aligned} \theta_k(z_0, z'_0) &\geq \{ (c^2 - 2ab) - 2db^2 c_{12} \\ &+ db(1 + c) \times 2c_{21} \}c \\ &= - \left[ 2ab + \frac{a^2 b^2}{1 - c} - c^2 \right]c > -[2ab + 2 \\ &- 2c - c^2]c > -\mathcal{X}(ab + 1)c. \end{aligned}$$

由(H1)及(10)式知  $\mathcal{X}(ab + 1)c < \theta$  ,故有  $\theta_k(z_0, z'_0) > -\theta$  和

$$\begin{aligned} \theta_k(z_0, z'_0) &\leq \{ (c^2 - 2ab) - 2db^2 c_{11} \\ &+ db(1 + c) \times 2c_{22} \}c \leq [c^2 \\ &+ 2ab + \mathcal{X}(1 - c)]c = \theta. \end{aligned}$$

总之 , $|\theta_k(z_0, z'_0)| \leq \theta$  . 从而(9)式成立 ,引理 3 证毕 .

关于定理 1 的证明 :由(2)和(4)式 ,有

$$|y'_{3k+1} - y_{3k+1}| = c|y'_{3k} - y_{3k}|,$$

根据引理 3 就有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y'_{3k+1} - y_{3k+1}| = 0, \quad (11)$$

由系统(2)和系统(4) ,并注意到由  $z_0, z'_0 \in D$  知  $y_{3k}(0, z_0), y'_{3k}(0, z'_0, z_0) \in D$  ,于是

$$|x'_{3k+1} - x_{3k+1}| \leq (a + 2dc^*)|y'_{3k} - y_{3k}|,$$

其中  $c^* = \max\{|c_{21}|, c_{22}\}$ . 由引理 3 知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x'_{3k+1} - x_{3k+1}| = 0. \quad (12)$$

利用 (11) 和 (12) 式就有对一般的  $n$  (6) 成立, 定理 1 证毕.

## 7. 结 论

本文自行设计并建立了一个二维离散混沌的电

路实验系统, 在此系统中实现脉冲同步混沌和超混沌, 并从数学上对系统的脉冲同步进行了解析分析, 实验结果与理论分析和数值计算结果完全一致. 本文还进一步研究了噪声对系统同步的影响, 实验结果也表明: 在低噪声条件下, 用脉冲驱动方式仍能同步混沌和超混沌系统, 即系统具有一定的鲁棒性.

- [1] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Oppenheim A V *et al* 1992 *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proc.* **IV** 117
- [3] Cuomo K M and Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [4] Peng J H *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [5] Stojanovski T, Kocarev L and Parlitz V 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 562
- [6] Stojanovski T, Kocarev L and Parlitz V 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4035
- [7] Liu F, Mu Z L and Qiu Z L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1198 (in Chinese) [刘 锋、穆肇骊、邱祖廉 1999 物理学报 **48** 1198]
- [8] Wang J L and Chen G Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1605 (in Chinese) [王金兰、陈光旨 1999 物理学报 **48** 1605]

- [9] Lai J W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 21 (in Chinese) [赖建文等 2001 物理学报 **50** 21]
- [10] Dai D and Ma X K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1237 (in Chinese) [戴 栋、马西奎 2001 物理学报 **50** 1237]
- [11] Danas A, Yang T and Chua L O 1998 *Int. J. Bifurc. Chaos* **8** 639
- [12] Morgul O and Feki M 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5004
- [13] Morgul O 2000 *Phys. Rev. E* **62** 3543
- [14] Yang T and Chua L O 1997 *Int. J. Bifurc. Chaos* **7** 645
- [15] Kocarev L and Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [16] Yue L J, Chen Y Y and Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097 (in Chinese) [岳丽娟、陈艳艳、彭建华 2001 物理学报 **50** 2097]

# Experimental study for impulsive synchronization of a discrete chaotic system<sup>\*</sup>

Chen Ju-Fang<sup>1)</sup> Zhang Ru-Yuan<sup>2)</sup> Peng Jian-Hua<sup>1)B)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

<sup>2)</sup> Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

<sup>3)</sup> College of Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

(Received 27 June 2002; revised manuscript received 14 October 2002)

## Abstract

A two-dimensional discrete system with chaotic and hyperchaotic characteristics has been designed and its dynamic behaviour has been analyzed, and the impulsive synchronization conditions have been obtained by mathematical analysis. In our experiment, impulsive synchronization of the circuit system has been realized. The experimental data are in good agreement with the results of theoretical analysis and numerical calculation. In addition, the experimental results demonstrate the effectiveness and robustness to noise by means of the above method.

**Keywords:** impulsive synchronization, discrete system, circuit experiment

**PACC:** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Foundation for University Key Teachers (Grant No. [2000] 65), and the Key Program of the Science and Technology Research from the Ministry of Education of China (Grant No. [2000] 00042).

<sup>†</sup> Corresponding author.