

# 具有时滞的一阶细胞神经网络 动态行为研究 \*

张 强<sup>1)</sup> 高 琳<sup>1)</sup> 王 超<sup>1)</sup> 袁 涛<sup>1)</sup> 许 进<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( 西安电子科技大学电子工程研究所 , 西安 710071 )

<sup>2)</sup>( 华中科技大学控制科学与工程系 , 武汉 430074 )

( 2002 年 2 月 4 日收到 2002 年 11 月 18 日收到修改稿 )

研究了具有时滞的一阶细胞神经网络的复杂动力学行为 , 证明了 Hopf 分叉的存在性 , 指出了若选择适当的参数 , 则该网络中可以产生混沌 . 计算机仿真实验表明所得结论的正确性 . 由于该网络的构成较简单 , 因此实际中可以作为混沌发生器加以应用 .

关键词 : 细胞神经网络 , 时滞 , Hopf 分叉 , 混沌

PACC : 0547 , 0545

## 1. 引 言

细胞神经网络 ( CNN ) 是由 Chua 和 Yang<sup>[1]</sup> 于 1988 年提出的一种新颖的神经元网络模型 . 与 Hopfield 网络一样 , 这是一种反馈型网络 , 然而与 Hopfield 网络中各个神经元之间的全局连接性不同 , CNN 的网络结构是局域连接型的 , 因此它非常适合超大规模集成电路 ( VLSI ) 实现 . 除此以外 , 由于 CNN 网络的动态范围及连接复杂性与 CNN 中的神经元个数无关 , 使得其硬件实现具有可靠性和鲁棒性 . 所有这些特征使 CNN 具有良好的应用前景 . 目前 CNN 已被用于模式识别、联想记忆、图像处理、偏微分方程的近似求解以及组合优化等领域 . 然而 , 这些工程应用极大地依赖于 CNN 的动态行为 . 因此 , 研究 CNN 的动态行为 ( 例如稳定性、振荡以及混沌等 ) 对于 CNN 的硬件设计具有重要的指导作用<sup>[2-7]</sup> . 文献 [2] 研究了三阶自治细胞神经网络的混沌行为 . 文献 [3] 指出二阶非自治细胞神经网络中也可以产生混沌 . 文献 [4] 研究了二阶自治时延细胞神经网络 ( DCNN ) 中的混沌行为 . 本文主要研究具有时滞的一阶细胞神经网络的动态行为 , 分析了其产生分叉的条件 , 通过计算机仿真验证了混沌现象的存在性 , 从

而说明了在简单的一阶时滞网络中也可以出现丰富的动力学行为 .

## 2. 模型描述及其动力学分析

考虑由下述一阶方程描述的单个神经元的演化方程 :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + af(x(t)) + b \sin(\omega x(t - \tau)), \quad (1)$$

其中  $a, b, \omega$  为参数 ,  $\tau$  为时滞 . 在文献 [1] 中神经元的激励函数为分段线性函数 ( PWL ) :  $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + 1) - |x - 1|$  . 本文中采用三次函数 :  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$  , 有关激励函数为此类函数时的无时滞反馈 ( 即  $b = 0$  ) 时的神经网络的性质及应用可参阅文献 [8] . 设系统 (1) 的平衡点为  $x^*$  , 则  $x^*$  满足方程 (2) :

$$x^* = af(x^*) + b \sin(\omega x^*). \quad (2)$$

显然 , 无论参数  $a, b, \omega$  为何值 ,  $x = 0$  总是系统 (1) 的一个平衡点 . 系统 (1) 为泛函微分方程的一个特例 , 称为时滞微分方程 , 它的初始条件为定义在区间  $[-\tau, 0]$  上的任意一个连续函数 , 有关时滞微分方程的一般理论参见文献 [9, 10] . 为了建立本文的结

\* 国家自然科学基金 ( 批准号 69971018 ) 资助的课题 .

果,需要以下的 Hopf 分叉引理.

引理<sup>[10]</sup> 对于含参数的时滞微分方程  $\dot{x} = f(\alpha, x_t)$ , 若满足下列条件, 则系统存在 Hopf 分叉:  
(a) 对于某个参数  $\alpha = \alpha_0$ , 其线性化方程具有纯虚特征根  $\lambda_0 = iv_0$ , 且除了  $\pm iv_0$  外, 无其他  $\lambda_0$  的整数倍的特征根 (b)  $\operatorname{Re} \frac{\partial \lambda(\alpha_0)}{\partial \alpha} \neq 0$ .

根据以上引理, 有如下定理:

定理 在系统(1)中, 若参数  $a, b, \omega$  满足  $a - b\omega < -1$ , 则系统(1)的零解对于任何时滞都是不稳定的; 若参数  $a, b, \omega$  满足  $a + b\omega < -1$ ;  $a - b\omega > -1$ , 则存在时滞  $\tau$  的一个临界值:  $\tau_c =$

$$\frac{\arccos\left(\frac{a+1}{b\omega}\right)}{\sqrt{b^2\omega^2 - (a+1)^2}} \quad \text{当 } 0 \leq \tau \leq \tau_c \text{ 时, 系统(1)的零解}$$

是渐近稳定的, 而当  $\tau$  连续通过  $\tau_c$  时, 在  $x = 0$  处发生 Hopf 分叉.

证明 系统(1)在  $x = 0$  处的线性化方程为

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(a+1)x(t) + b\omega x(t-\tau), \quad (3)$$

而(3)式的特征方程为  $\lambda = -(a+1) + b\omega e^{-\lambda\tau}$ . 根据文献[9]知, 若  $-(a+1) + b\omega > 0$ , 即  $a - b\omega < -1$ , 则(3)式的零解对于任何  $\tau$  都是不稳定的, 即系统(1)的零解是不稳定的; 为了应用以上引理, 我们将时滞  $\tau$  作为分叉参数, 并设  $\lambda_0 = iv_0$ , 将它代入特征方程中, 可得

$$\begin{aligned} iv_0 &= -(a+1) + b\omega e^{-iv_0\tau} \\ &= (b\omega \cos v_0 \tau - (a+1)) - b\omega \sin v_0 \tau, \end{aligned}$$

因此得到关于  $(v_0, \tau)$  的方程组为

$$\begin{aligned} b\omega \cos v_0 \tau &= a+1, \\ b\omega \sin v_0 \tau &= -v_0. \end{aligned}$$

由此可以解出  $(v_0, \tau)$

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{b^2\omega^2 - (a+1)^2}, \\ \tau_c &= \tau = \frac{\arccos\left(\frac{a+1}{b\omega}\right)}{\sqrt{b^2\omega^2 - (a+1)^2}}. \end{aligned}$$

现在来计算  $\operatorname{Re}\lambda'(\tau_c)$ , 为此将特征方程等号两边分别对  $\tau$  求导, 得

$$\lambda'(\tau) = \frac{-b\omega\lambda(\tau)e^{-\lambda\tau}}{1 + b\omega\tau e^{-\lambda\tau}}.$$

由上式经过简单计算可知:  $\operatorname{Re}\lambda'(\tau_c) = v_0^2 = b^2\omega^2 - (a+1)^2 \neq 0$ . 因此, 根据引理, 定理得证.

根据以上定理, 可以作出有关参数的相图, 以判

别参数对于系统行为的影响. 为了方便起见, 给出  $(b\omega, -(a+1))$  的相图, 如图 1 所示. 图 1 中曲线  $l_1, l_2$  由(3)式所对应的特征方程决定. 这两条曲线将参数平面划分为几个部分, 每个部分的特性可以根据特征根进行分析. 例如由  $l_1, l_2$  包围的部分, 其特征根的实部都是负的, 因而此时系统是稳定的.

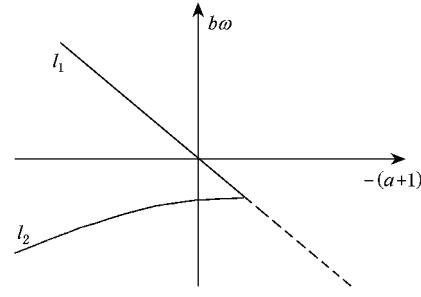


图 1 参数  $(b\omega, -(a+1))$  的相图

下面通过计算机仿真来验证本文结论的正确性.

首先选择固定的参数  $a = 3, b = -6, \omega = 5$ , 以时滞  $\tau$  作为分叉参数. 显然, 以上参数满足本文定理中的要求. 此时, 根据定理可得  $\tau_c = 0.0573$ . 图 2 为  $\tau = 0.05 < \tau_c$  时神经元的时间演化图. 从图 2 可以看出, 此时系统是稳定的, 并且最终收敛于平衡点  $x = 0$ .

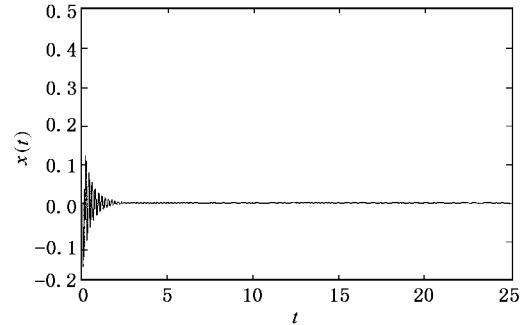


图 2  $\tau = 0.05$  时神经元的时间演化图

图 3 和图 4 分别为时滞  $\tau = 0.06 > \tau_c$  和  $\tau = 0.1 > \tau_c$  时神经元的时间演化图及相图, 其横轴为  $x(t)$ , 纵轴分别为  $x(t-0.06)$  和  $x(t-0.1)$ . 由图 3 和图 4 可以看出, 这两种情况下系统都是周期的.

我们继续增加时滞  $\tau$  的值, 图 5 和图 6 分别为  $\tau = 0.25$  和  $\tau = 0.3$  时神经元的时间演化图、相图及功率谱图. 从图 5 和图 6 可以清楚地看出这两种情况下系统产生了混沌. 为了更加准确地反映混沌的发生, 我们使用文献[8]中的方法分别计算了神经元在取这两种参数时的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$ , 结果分别为

0.4762 和 0.5024 这进一步验证了混沌的存在性.

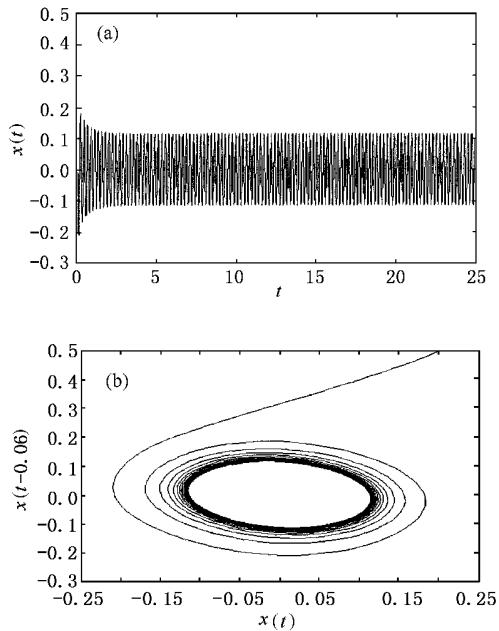


图 3  $\tau = 0.06$  时神经元的时间演化图及相图

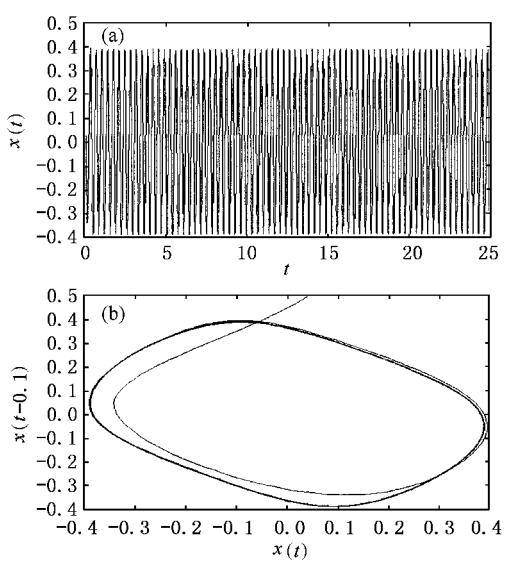


图 4  $\tau = 0.1$  时神经元的时间演化图及相图

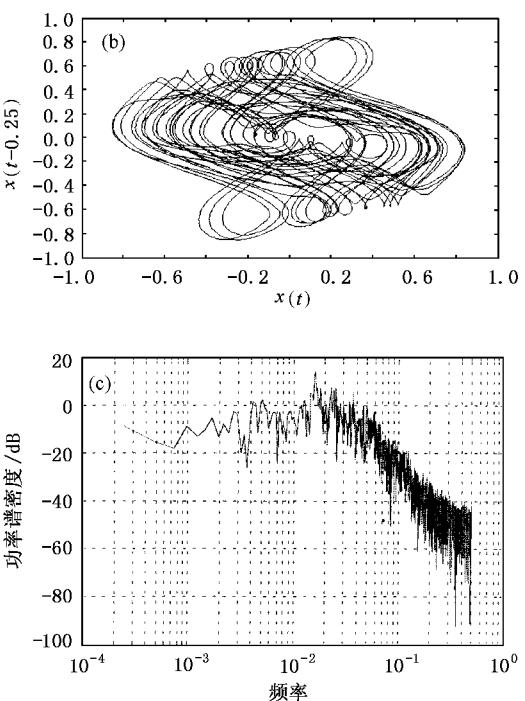
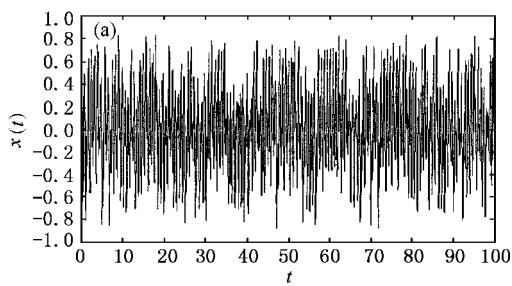


图 5  $\tau = 0.25$  时神经元的时间演化图、相图及功率谱图

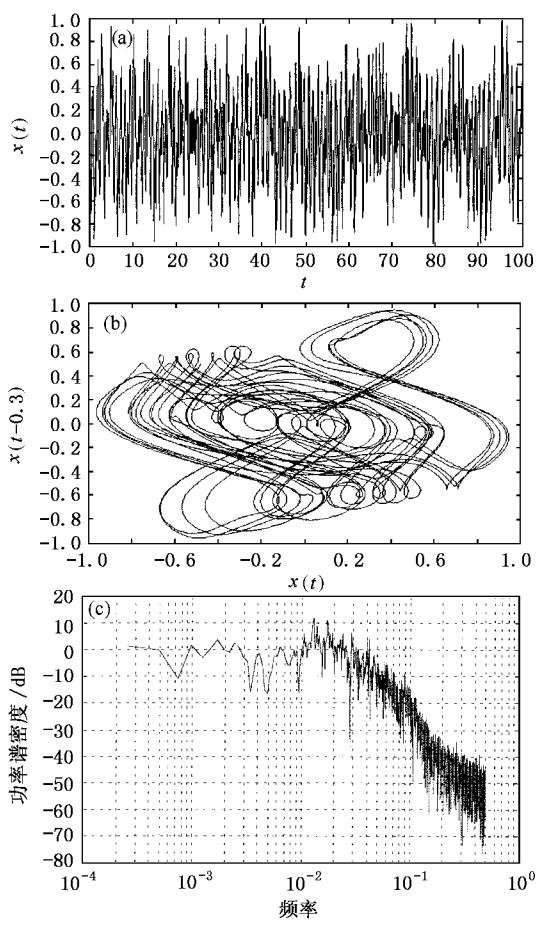


图 6  $\tau = 0.3$  时神经元的时间演化图、相图及功率谱图

以上的讨论为将时滞  $\tau$  作为分叉参数时的情况. 实际上也可将神经元中的其他参数作为分叉参数, 例如固定  $a = 3$ ,  $\omega = 5$ ,  $\tau = 0.2$ , 而将  $b$  作为分叉参数. 图 7 和图 8 分别为  $-b \in [1, 4]$  和  $-b \in [4, 7]$  时的神经元分叉图. 为了将系统的暂态性去掉, 对于每个参数  $b$ , 图中只给出长度为时间序列总长度一半时的  $x(t)$  值. 从图 7 和图 8 可以看出系统存在许多周期窗, 并且周期窗与混沌交替出现, 由此说明了这样一个简单的一阶系统中竟然出现了如此复杂的动力学现象.

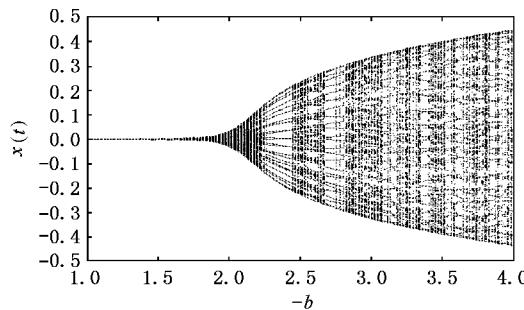


图 7  $-b \in [1, 4]$  时神经元的分叉图

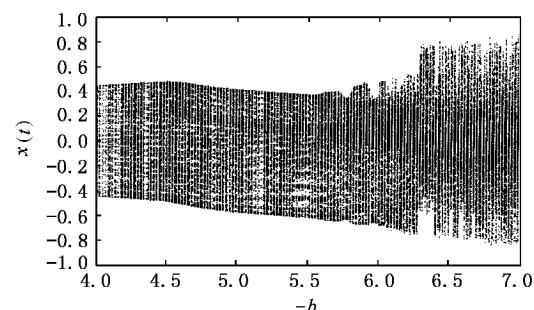


图 8  $-b \in [4, 7]$  时神经元的分叉图

### 3. 结 论

本文研究了具有时滞的一阶连续细胞神经网络模型的动力学行为. 以时滞作为分叉参数, 利用 Hopf 分叉理论给出了系统发生分叉的条件, 证明了若参数选择合适, 则当时滞足够大时, 系统可以产生混沌. 除了将时滞作为分叉参数外, 本文又将反馈增益作为分叉参数, 研究了系统的动态行为, 此时系统仍然可以产生混沌. 计算机仿真证明了本文结论的正确性.

- [1] Chua L O and Yang L 1988 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **35** 1257
- [2] Zou F and Nossek J A 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **40** 166
- [3] Zou F and Nossek J A 1991 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **38** 811
- [4] Gilli M 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **40** 849
- [5] He G G *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2103 [in Chinese] 何国光等 2001 *物理学报* **50** 2103 ]
- [6] Wang H X *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2303 [in Chinese] 王宏霞等 2001 *物理学报* **50** 2303 ]

- [7] Zhang Q *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 22
- [8] Slavova A 1998 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **45** 587
- [9] Qing Y X *et al* 1989 *Stability of Dynamical Systems with Delays* (Beijing Science Press) [in Chinese] 秦元勋等 1989 带有时滞的动力系统的运动稳定性(北京 科学出版社)]
- [10] Yang K 1993 *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* (New York: Academic)
- [11] Rosenstein M T *et al* 1993 *Physica D* **65** 117

# Study of the dynamics of a first-order cellular neural networks with delay<sup>\*</sup>

Zhang Qiang<sup>1)</sup> Gao Lin<sup>1)</sup> Wang Chao<sup>1)</sup> Yuan Tao<sup>1)</sup> Xu Jin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( Institute of Electronic Engineering ,Xidian University ,Xi 'an 710071 ,China )

<sup>2)</sup>( Department of Control Science and Engineering ,Huazhong University of Science and Technology ,Wuhan 430074 ,China )

( Received 4 February 2002 ; revised manuscript received 18 November 2002 )

## Abstract

The dynamics of a first-order cellular neural network with delay has been studied in this paper. By using the delay as a bifurcation parameter, the Hopf bifurcations are proved. Furthermore, by choosing suitable parameters and delay, chaotic behaviour has been observed. Computer simulations, as well as Lyapunov exponent, are presented to support our results. Due to the simple structure of this network, it can serve as a chaos-generator in practice.

**Keywords** : cellular neural networks , delay , Hopf bifurcations , chaos

**PACC** : 0547 , 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No.69971018 ).