

对数型非线性介质中一维空间暗、 灰孤子的存在性分析*

卫 青 王 奇 施解龙

(上海大学物理系, 上海 200436)

(2002 年 8 月 9 日收到 2002 年 11 月 26 日收到修改稿)

对在对数型非线性介质中空间灰孤子的存在性进行了研究, 认为对数型非线性介质中可以同时支持暗和灰空间孤子态。并对暗空间孤子的宽度变化作了分析, 指出当峰值功率较低时, 束宽随功率的增大而急剧减小, 表现出良好的非线性效应; 当峰值功率逐渐增大时, 束宽的减小趋势逐渐放慢直至趋于停止。

关键词: 空间暗孤子, 空间灰孤子, 对数型非线性介质

PACC: 4265S, 4265, 0340K

1. 引言

近年来, 已有若干研究小组在光折变晶体中观测到了空间光孤子^[1-4]。由于它在光学信息处理、光学开关、光学集成、光互连和光计算等诸多方面具有应用前景, 引发了人们研究热情。光折变空间孤子可以分为 4 类: 准稳态孤子^[2]、屏蔽孤子^[5]、光伏孤子^[3, 4]和屏蔽光伏孤子。目前国内一些研究小组的工作多集中在屏蔽-光伏孤子, 并取得了一系列重要研究成果。在有外加电场的光伏光折变晶体中存在亮、暗^[6]和灰^[7]稳态空间孤子, 进一步指出受扩散作用影响, 亮屏蔽-光伏孤子呈现自偏转特性^[8]; 在小振幅下, 可以得到屏蔽-光伏孤子 FWHM 宽度和自弯曲程度的显式^[9]; 研究了同时具有外加电场和光伏效应的光折变晶体中同偏振方向同波长的两束互不相干光的耦合, 证明了非相干耦合屏蔽-光伏孤子对^[10, 11]和非相干多分量耦合屏蔽-光伏孤子对^[12]的存在。然而, 在国际上理论研究工作具体表现为以下几个方面: 证实了在有外加电场的光折变晶体中可以存在亮、暗、灰空间孤子态^[5]和亮亮、暗暗、亮暗三种非相干耦合空间孤子对^[13]; 并对它们的相关特性及其在传播过程中的稳定性问题作了讨论^[13, 14]; 揭示了在光折变晶体中非相干亮、暗自陷光束的动力学行为及其相应的相干特性^[15]。

但是针对对数型非线性介质中空间孤子的研究论文尚不多见^[16, 17]。迄今为止, 虽有文献论及^[18]对数型非线性介质支持空间孤子的存在, 但是缺乏严格的理论论证。本文尝试在现有的理论基础上, 就对数型非线性介质中空间孤子的存在性问题作理论上的严格论证。本文由亥姆霍兹方程出发, 导出在对数型介质中, 光束所满足的动态演化方程, 然后利用文献 5 的方法, 将满足一般空间暗、灰孤子态条件的数学表述形式强加在波动方程(7)所设的试探解上, 得到了在对数型非线性介质中若要存在空间暗和灰孤子态的必要条件。最后得出结论: 对数型非线性介质可同时支持空间暗、灰孤子态^[5, 7, 14]。并对空间暗孤子的特性作了分析, 指出在峰值功率较低时, 束宽随功率的增大而急剧减小, 这时对数型非线性材料的性质类似于克尔型的非线性材料, 表现出良好的非线性效应; 当峰值功率逐渐增大时, 束宽的减小趋势逐渐放慢直至趋于停止。

2. 基本方程

设一束准单色光波在介质中传播, 其电场分量满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E + (k_0 n)^2 E = 0, \quad (1)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 为自由空间中的光波长, $n^2 = n_0^2$

* 国家自然科学基金(批准号 60177020)及上海市教育委员会第四期重点学科资助的课题。

$+ \delta n(I)$, n_0 为材料固有的折射率, $\delta n(I)$ 为光束在传播中所引起的折射率指数变化, 其变化是光强的对数型函数:

$$\delta n(I) = n_2 \ln(1 + I/I_t), \quad (2)$$

式中 I_t 为阈值光强, n_2 为与光强有关的折射率变化系数. 我们约定光波在 x 方向发生偏振和衍射, 沿 z 方向传播, 这样光束的电场分量可表述成

$$E = \hat{x} \phi(x, z) \exp(i k z), \quad (3)$$

式中 $k = k_0 n_0$, \hat{x} 表示沿 x 方向的单位矢量. 将(3) 式代入(1)式, 考虑光束的慢变化包络近似, 得到 ϕ 所满足的傍轴演化方程

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{2k \partial x^2} + \frac{k_0 n_2}{2n_0} \ln\left(1 + \frac{I}{I_t}\right) \phi = 0. \quad (4)$$

根据 Poynting 定律, 光束的光强可表示为

$$I = n_0 |\phi|^2 / 2\eta_0, \quad (5)$$

式中 η_0 为真空中的波阻抗. 于是(4)式写成

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{2k \partial x^2} + \frac{k_0 n_2}{2n_0} \ln\left(1 + \frac{n_0 |\phi|^2}{2\eta_0 I_t}\right) \phi = 0. \quad (6)$$

引入无量纲的变量 $\xi = z/kx_0^2$, $s = x/x_0$, $u = \phi(n_0/2\eta_0 I_t)^{1/2}$, 将其代入(6)式, 得到光束的包络 u 所满足的归一化动态演化方程

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{2\partial s^2} + \beta \ln(1 + |u|^2) u = 0, \quad (7)$$

式中 $\beta = (k_0 x_0)^2 n_2 / 2x_0$ 为光束的初始空间宽度.

3. 灰孤子解

所谓灰空间孤子, 是在均匀背景光强中一个低能量暗缺, 在光束的中心轴线上具有最小光强, 但不为零, 在横向远离光束中心处, 虽受衍射的影响, 其光强亦趋向于一有限值; 其相位在整个横截面内不再保持恒定, 而是随衍射距离的变化而变化. 另外, 其波形在整个横截面内呈对称分布.

于是设试探解为^[5]

$$u = \rho^{1/2} y(s) \exp\left[i\left(\nu\xi + \int_0^s \frac{J ds'}{y^2(s')}\right)\right], \quad (8)$$

式中 J 为待定实常量, ν 为传播常数的非线性频移, $y(s)$ 为归一化的振幅函数, ρ 为空间暗孤子能量空缺的最大值^[16]. 由(8)式可以看出灰空间孤子光场的相位是以 $\int_0^s \frac{J ds'}{y^2(s')}$ 的形式随 s 变化. 将(8)式代入(7)式, 得到

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - 2\nu y - \frac{J^2}{y^3} + 2\beta \ln(1 + \rho y^2) = 0. \quad (9)$$

由灰空间孤子的一般特征可得到归一化的振幅(实)函数 $y(s)$ 所应满足的条件为 (a) $y(s)$ 为 s 的偶函数 (b) $y(s \rightarrow \pm \infty) = 1$; (c) $y'(s \rightarrow \pm \infty) = 0$; (d) $y'(s=0) = 0$; (e) $y^2(s=0) = m$; (f) $\sqrt{m} < |y(s)| < 1$; (g) $y''(s \rightarrow \pm \infty) = 0$, 其中 m 表示灰度, 灰度越小, 灰空间孤子就越暗, 当 $m=0$ 时就成为暗空间孤子. 利用边界条件(b)和(g), 由方程(9)可直接得到

$$J^2 = -2\nu + 2\beta \ln(1 + \rho). \quad (10)$$

将方程(9)等号两边同时乘以 $y(s)$ 关于 s 的一阶导数, 并对 s 在区间 $[0, s]$ 内积分, 且利用边界条件(d)和(e), 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 2\nu(y^2 - m) - J^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{m}\right) \\ &\quad - \frac{2\beta}{\rho}[(1 + \rho y^2) \ln(1 + \rho y^2) \\ &\quad - (1 + \rho m) \ln(1 + \rho m) \\ &\quad - \rho(y^2 - m)]. \end{aligned} \quad (11)$$

再次对方程(9)积分, 利用边界条件(b)和(c), 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 2\nu(y^2 - 1) - J^2\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \\ &\quad - \frac{2\beta}{\rho}[(1 + \rho y^2) \ln(1 + \rho y^2) \\ &\quad - (1 + \rho) \ln(1 + \rho) - \rho(y^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (12)$$

比较(11)与(12)式, 可得灰空间孤子的非线性空间频移 ν 的表达式为

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\beta(\rho - 2\rho m - m) \ln(1 + \rho)}{\rho(1 - m)^2} \\ &\quad + \frac{m\beta(1 + \rho m) \ln(1 + \rho m)}{\rho(1 - m)^2} + \frac{m\beta}{(1 - m)}. \end{aligned} \quad (13)$$

由此(12)式可化简为

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 2\nu\left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right) \\ &\quad - \frac{2\beta}{\rho}[(1 + \rho y^2) \ln(1 + \rho y^2) \\ &\quad + \left(\frac{\rho}{y^2} - 1 - 2\rho\right) \ln(1 + \rho) \\ &\quad - \rho(y^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (14)$$

观察上面得到的一系列表达式, 可以发现若要求在自散焦对数型介质中存在灰空间孤子态, 必须满足条件 $J^2 > 0$ 和 $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 > 0$. 将(13)式代入(10)式, 整理得

$$J^2 = \frac{-2\beta m}{(1-m)} \left[1 + \frac{(1+\rho m)}{\rho(1-m)} \ln \left(\frac{1+\rho m}{1+\rho} \right) \right]. \quad (15)$$

利用 $\ln \left(\frac{1+\rho m}{1+\rho} \right) = \ln \left(1 - \frac{\rho - \rho m}{1+\rho} \right)$ 的泰勒级数展开, 可以证明(15)式等号右边中括号内的代数和在 m 的定义域内($0 < m < 1$)必为正数, 同时满足条件 $J^2 > 0$, 故有参量 $\beta < 0$, 这与在自散焦对数型介质中要求参量 β 取负值相符合. 通过函数的单调性可以证明, 在 $\beta < 0$, $\rho < m < 1$ 和 $\rho > 0$ 情况下, 都能够满足条件 $\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 > 0$. 故可以得到结论: 在对数型非线性介质中可以存在空间灰孤子.

将方程(14)等号两边关于参量 s 积分一次, 得到

$$s = \pm \int_{\sqrt{m}}^y \left\{ 2\nu \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} - 2 \right) - \frac{2\beta}{\rho} \left[(1 + \rho \zeta^2) \ln(1 + \rho \zeta^2) + \left(\frac{\rho}{\zeta^2} - 1 - 2\rho \right) \ln(1 + \rho) - \rho(\zeta^2 - 1) \right] \right\}^{1/2} d\zeta. \quad (16)$$

根据文献[16], 取自散焦对数型介质的材料参数如下: $n_2 = -10^{-4}$, 若此时入射光束波长 $\lambda_0 = 0.5\mu\text{m}$, 初始宽度 $x_0 = 18\mu\text{m}$, 则有 $\beta = -2.558$. 利用数值积分方法对方程(16)进行模拟, 得到在 $\beta = -2.558$, $\rho = 1$, 灰度 m 分别为 0.5, 0.55 和 0.6 时, 灰空间孤子归一化光强横向分布规律, 如图 1 所示.

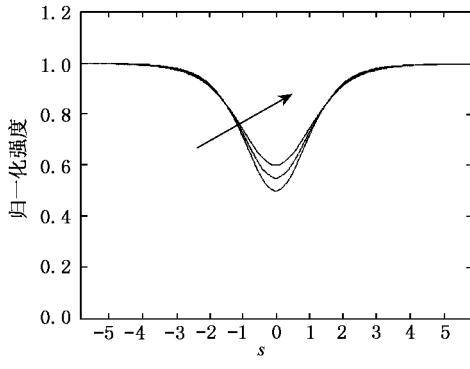


图 1 灰空间孤子归一化光强横向分布曲线 $\beta = -2.558$, $\rho = 1$, 沿箭头方向灰度 m 依次增大, 为 0.5, 0.55 和 0.6

由图 1 可见: 随灰度 m 的增大, 光束中心轴线处暗槽深度逐渐变浅, 光束宽度亦相应增加; 当 $m = 1$ 时, 束宽无限大. 此时在均匀背景光强上将不存在低能量的暗缺. 由图 1 给出的空间灰孤子的宽度分别为 $40.14\mu\text{m}$, $42.66\mu\text{m}$ 和 $43.38\mu\text{m}$. 另外, 从试探解(8)

式中可看出其光束横截面内的光场相位是以 $\phi = \int_0^s \frac{J}{y^2(s')} ds'$ 的形式随衍射距离 s 而变化. 图 2 给出当 $\beta = -2.558$, $\rho = 1$, 灰度 $m = 0.5$ 时, 灰空间孤子的光场相位分布. 图 2 反映出, 灰空间孤子的光场相位关于原点呈反对称分布.

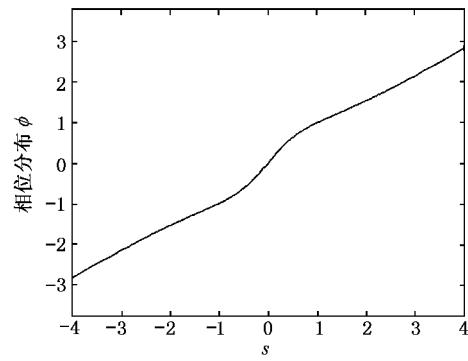


图 2 灰空间孤子光场相位分布曲线 $\beta = -2.558$, $\rho = 1$, 灰度 $m = 0.5$

4. 暗孤子解

对于空间暗孤子, 它一般具有以下几个特点: 其波形具有近似于双曲正切的反对称线型; 在轴向中心光束的相位有 π 的突变, 光束中心的光强为零; 其波形内嵌在一个均匀的背景光强之中, 当传播至无穷远时, 虽受衍射影响, 但其强度峰值仍趋于一有限值. 根据以上特点, 可以认为暗空间孤子是灰空间孤子的一个特例. 于是我们在灰空间孤子解的基础上, 令灰度 $m = 0$, 就得到一系列与之相对应的结果, 从而简化了分析的过程.

在(10)、(13)和(14)式中令灰度 $m = 0$, 可得

$$J^2 = 0, \quad (17)$$

$$\nu = \beta \ln(1 + \rho), \quad (18)$$

$$\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = \frac{2\beta}{\rho} J(y^2), \quad (19)$$

式中函数

$$J(y^2) = \left[(1 + \rho y^2) \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 + \rho y^2} \right) + \rho(y^2 - 1) \right]. \quad (20)$$

方程(19)表明, 在实数范围内等号右边取非负值. 一般在 $n_2 < 0$ 的自散焦克尔介质中能够支持空间暗孤子态^[19], 故此时 $\beta < 0$, 再考虑到 $\rho > 0$, 则 $J(y^2) < 0$. 这就是对数型非线性介质中存在空间暗孤子态的必

要条件.另外易证 $f(y^2)$ 在 y^2 的定义域内有 $0 < y^2 < 1$, 是一单调递增函数, 且 $f(y^2=1)=0$, 故 $f(y^2)$ 的取值必为负. 综上所述, 可以认为在对数型非线性介质中能够存在空间暗孤子态.

将方程(18)等号两边再积分一次, 得到

$$(2\beta)^{1/2} s = \pm \int_0^y \frac{\rho^{1/2} d\zeta}{[(1 + \rho\zeta^2) \ln\left(\frac{1 + \rho}{1 + \rho\zeta^2}\right) + f(\zeta^2 - 1)]^{1/2}}. \quad (21)$$

鉴于(21)式等号右边的积分在实数范围内没有闭合形式的解, 故只能通过数值积分方法对方程(21)进行模拟. 图3给出当 $\beta = -2.558$, $\rho = 0.5$ 时, 空间暗孤子归一化光强横向分布规律. 数值计算的结果表明在上述条件下暗空间孤子的宽度为 $32.76\mu\text{m}$.

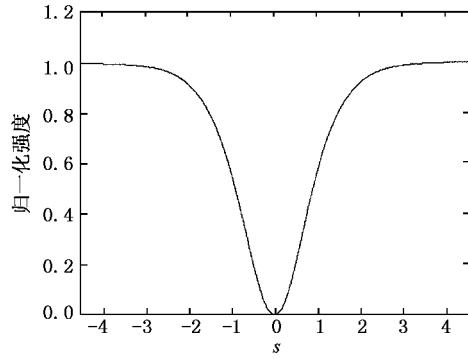


图3 空间暗孤子归一化光强横向分布曲线 $\beta = -2.558$, $\rho = 0.5$

在(21)式中令 $y^2(s) = 1/2$, 就可以借助于数值积分的方法来描述暗孤子的空间宽度随 ρ 的变化规律, 如图4所示.

图4表明, 当 ρ 取较低功率时, 宽度随 ρ 的增大急剧减小, 对数型非线性自散焦介质总折射率的指数表达式 $n^2(I) = n_0^2 + n_2 \ln\left(1 + \frac{I}{I_t}\right)$ 近似等于

$n^2(I) = n_0^2 + n_2 \frac{I}{I_t}$, 此时该非线性材料的 $n(I)$ 表式等同于克尔型的非线性材料, 表现出良好的非线性效应; 当 ρ 逐渐增大时, 束宽的减小趋势逐渐放慢直至趋于停止. 此处有一点需要说明, 虽然随峰值功率的增大孤子的宽度趋于稳定, 但介质的非线性折射率仍在变化之中, 并不是真正饱和现象的体现.

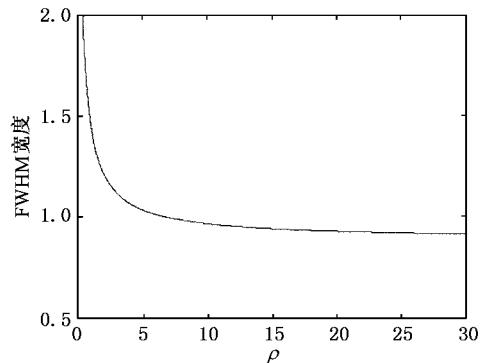


图4 暗孤子空间宽度随 ρ 的变化曲线 $\beta = -2.558$

5. 结 论

本文在适当选择空间暗和灰孤子试探解的基础上, 得到了对数型非线性介质中存在空间暗和灰孤子态的必要条件, 由此揭示了对数型非线性电介质中可以同时支持空间暗、灰孤子态, 由此完善了这一物理事实的理论描述. 对暗空间孤子的特性作了分析, 指出当峰值功率较低时, 束宽随功率的增大而急剧减小, 这时对数型非线性材料的折射率表式类似于克尔型的非线性材料, 表现出良好的非线性效应; 当峰值功率逐渐增大时, 束宽的减小趋势逐渐放慢直至趋于停止.

- [1] Duree G C, Shultz J L, Sharp G J, Segev M, Yariv A, Crosignani B, Porto P D and Neurgaonkar R R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 533
- [2] Segev M, Crosignani B, Ariv A Y and Fischer B 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 923
- [3] Taya M et al 1995 *Phys. Rev. A* **52** 3095
- [4] She W L, Lee K K and Lee W K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3182
- [5] Christodoulides D N and Carvalho M I 1995 *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 1628
- [6] Lu K, Tang T and Zhang Y 2000 *Phys. Rev. A* **61** 053822
- [7] Hou C F et al 2000 *Opt. Commun.* **181** 141
- [8] Liu J and Lu K 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 550
- [9] Hou C F, Li Y and Yuan B H 2000 *Chin. J. Laser B* **9** 551
- [10] Hou C F, Yuan B H, Sun X D and Xu K B 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1969 (in Chinese) 侯春风、袁保红、孙秀东、许克彬 2000 物理学报 **49** 1969]
- [11] Hou C F, Li S Q, Li B and Sun X D 2001 *Acta Phys. Sin.* **50**

- 1709 (in Chineses) 侯春风、李师群、李 彬、孙秀东 2001 物理学报 **50** 1709]
- [12] Hou C F , Li B , Sun X D , Jiang Y Y and Xu K B 2001 Chin . Phys . **10** 310
- [13] Christodoulides D N , Singh S R and Carvalho M I 1996 Appl . Phys . Lett . **68** 1763
- [14] Grandpierre A G and Christodoulides D N 2001 J . Opt . Soc . Am . B 18 55
- [15] Coskun T H and Christodoulides D N 1998 Opt . Lett . **23** 418
- [16] Christodoulides D N and Coskun T H 1997 Opt . Lett . **22** 1080
- [17] Krolkowski W , Edmundson D and Bang O 2000 Phys . Rev . E **61** 3122
- [18] Snyder A W and Mitchell J D 1997 Opt . Lett . **22** 16
- [19] Yuri S K and Barry L D 1998 Phys . Rep . **298** 81

Analysis of the existence of one-dimensional dark and gray spatial solitons in logarithmically nonlinear media^{*}

Wei Qing Wang Qi Shi Jie-Long

(Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 200436 , China)

(Received 9 August 2002 ; revised manuscript received 26 November 2002)

Abstract

The existence of dark and gray spatial solitons in logarithmically nonlinear media is investigated. It is shown that both dark and gray solitons are possible in corresponding nonlinear media. The spatial width for dark solitons is analyzed . It is revealed as follows : the beam width decreases dramatically with increasing power when the peak power is much lower , exhibiting the good nonlinear effects in such cases. The variation of beam width is slow at first and then becomes constant when the peak power continuously increases .

Keywords : dark spatial solitons , gray spatial solitons , logarithmical nonlinear media

PACC : 4265S , 4265 , 0340K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No.60177020) and the Funds for Key Program from the Education Commission of Shanghai ,China.