

# 两个非线性发展方程的双向孤波解与孤子解<sup>\*</sup>

徐桂琼<sup>1,2)</sup> 李志斌<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(上海大学信息管理系, 上海 200436)

<sup>2)</sup>(华东师范大学计算机科学技术系, 上海 200062)

(2002 年 10 月 23 日收到 2002 年 12 月 22 日收到修改稿)

采用分步确定拟解的原则, 对齐次平衡法求非线性发展方程孤子解的关键步骤作了进一步改进。以广义 Boussinesq 方程和 bidirectional Kaup-Kupershmidt 方程为应用实例, 说明使用该方法可有效避免“中间表达式膨胀”的问题, 除获得标准 Hirota 形式的孤子解外, 还能获得其他形式的孤子解。

关键词: 齐次平衡法, 孤子解, 孤波解, 广义 Boussinesq 方程, bidirectional Kaup-Kupershmidt 方程  
PACC: 0340K, 0290

## 1. 引言

非线性偏微分方程的精确求解对研究自然界中众多的非线性现象具有十分重要的意义。自反散射方法问世以来, 已涌现出许多构造非线性偏微分方程孤立波解的方法和技巧。如 Bäcklund 变换、Darboux 变换、Hirota 方法<sup>[1-3]</sup>等。然而, 这些方法在求孤子解时, 求解过程较为繁杂, 不易使用。由于计算机代数系统的不断发展, 近几年一些直接代数方法的研究变得非常活跃, 如混合指数方法、齐次平衡法、双曲正切方法、三角函数方法及试探法<sup>[4-17]</sup>等, 这些方法在非线性偏微分方程的孤立波解得到了较为广泛的应用。齐次平衡法<sup>[4]</sup>可以获得一大批非线性方程的孤波解, 最近, 文献[5—7]等对该方法的关键步骤进行拓宽后得到了一些方程的孤子解及其他形式的精确解。本文在此基础上, 对齐次平衡法求孤子解作了进一步改进, 避免“中间表达式膨胀”的问题, 同时还得到形式更丰富的孤子解。

首先简述齐次平衡法的基本步骤<sup>[4]</sup>。给定一个非线性偏微分方程, 假定有两个自变量  $x, t$ ,

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (1)$$

式中  $P$  为关于未知函数  $u(x, t)$  及其导数的多项式。通过平衡方程(1)中最高阶导数项与最高阶非线性项, 可以选择  $u(x, t)$  为

$$u(x, t) = \frac{\partial^{m+n} f(w)}{\partial^m x \partial^n t} + \mathcal{L}(f(w)), \quad (2)$$

式中  $\mathcal{L}(f(w))$  为  $f(w)$  关于  $x$  和  $t$  的低于  $m+n$  阶偏导数的适当的线性组合。将(2)式代入方程(1), 令  $u(x, t)$  的偏导数的最高幂次的系数为零, 可得关于  $f(w)$  的常微分方程, 解之得

$$f = G(w). \quad (3)$$

再由(3)式出发, 将前一步所得方程中  $f$  的各阶导数的非线性项换成  $f$  的高阶导数的线性项, 然后将  $f$  对  $w$  相同导数项整理到一起, 可得如下齐次微分方程:

$$F(f(u(x, t))) = 0. \quad (4)$$

通常的做法是令  $f$  的各阶导数前系数为零, 导出关于  $u(x, t)$  的超定微分方程组。若令  $u(x, t) = 1 + \exp(lx + vt)$ , 求解超定微分方程组确定所有待定常数, 连同(2)(3)式, 得到方程(1)的孤立波解。若

令  $u(x, t) = 1 + \sum_{i=1}^N \exp(l_i x + v_i t)$ , 求解超定微分方程组即可得方程(1)的类多孤波解<sup>[5]</sup>。

文献[7]认为, 上述方法难以得出大多数非线性方程孤子解的主要原因, 在于令方程(4)中  $f$  对  $w$  相同导数项前的系数为零的假设限制了  $u(x, t)$  的一般性, 如弱化该限制条件, 则能得到更多形式的精确解。为此, 采取直接求解方程(4)的办法。对  $N$  ( $N \geq 1$ ) 孤子解, 令

\* 国家重点基础研究发展规划(批准号: G1998030600)和上海市自然科学基金(批准号: ZD14012)资助的课题。

$$u(x, t) = 1 + \sum_{i=1}^N a_i \exp(\theta_i) + \sum_{i=j+1}^N \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij} \exp(\theta_i + \theta_j) + \dots + \sum_{i=k+2}^N \sum_{j=k+1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-2} c_{ijk} \exp(\theta_i + \theta_j + \theta_k) + \dots + z_n \exp(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N),$$

$$\theta_i = l_i x + v_i t + \xi_{i0}, \quad N \geq 1. \quad (5)$$

将(5)式直接代入方程(4), 令  $\exp(\theta_i)$  及其高次项前的系数为零, 得到一组只包含所有待定系数的超定代数方程组. 解此方程组得到方程(4)的解(又称拟解), 进而求得原方程(1)的孤子解.

经进一步研究, 我们发现通过上述方法可获得一大类方程符合 Hirota 标准形式的孤子解, 然而对方程(4)采用先验假设的方法求解在具体应用中尚存在一些不足. 首先, 某些非线性方程不具有标准形式的孤子解, 如本文中将要讨论的 bidirectional Kaup-Kupershmidt 方程(简称 bKK 方程), 其孤波解和双孤子解以及三孤子解等, 由(5)式出发是无法得到的. 也就是说, 方程(1)拟解的假设形式(5)并不完备. 其次, 若通过对方程(4)求形如(5)式的解从而得到原方程的多孤子解, 容易出现“中间表达式膨胀”的问题. 以本文将要讨论的广义 Boussinesq 方程为例, 当  $N=2$  时, 需求解 21 个方程构成的代数方程组, 当  $N=3$  时, 需求解 117 个方程构成的代数方程组. 对于更加复杂的非线性偏微分方程或非线性耦合方程组, “中间表达式膨胀”问题将更为突出, 即使借助计算机代数系统也不易求解.

针对上述问题, 本文借鉴求非线性方程特解的幂级数方法的基本思想, 对齐次微分方程(4)采用分步确定的原则进行求解. 设

$$u(x, t) = 1 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots + \epsilon^r w_r + \dots \quad (6)$$

式中  $w_r$  ( $r=1, 2, \dots$ ) 为待定函数,  $\epsilon$  不是小参数. 将(6)式代入(4)式中, 合并  $\epsilon$  的同次幂, 令  $\epsilon^r$  的系数为零, 得  $w_r$  的一系列递推方程

$$\epsilon: \quad L \cdot w_1 = 0, \quad (7)$$

$$\epsilon^2: \quad L \cdot w_2 = N_1 \cdot (w_1), \quad (8)$$

$$\epsilon^3: \quad L \cdot w_3 = N_2 \cdot (w_1, w_2), \quad (9)$$

.....

式中  $L$  为线性微分算子,  $N_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) 为非线性微分算子. 一般地, 为求方程(1)指类型  $N$  ( $N \geq 1$ ) 孤子解, 选(7)式的解为

$$w_1 = \sum_{i=1}^N \exp(\theta_i),$$

$$\theta_i = l_i x + v_i t + \xi_{i0}. \quad (10)$$

方程(7)–(9)这一系列方程的特点是其非齐次项依赖于它前面方程的解. 将(10)式代入方程(7), 可确定出色散关系. 得到方程(7)的解  $w_1$  后, 方程(8)的非齐次项可确定出来, 该方程便转化为线性方程, 其解  $w_2$  可以确定, 进而方程(9), ……直至第  $r$  个方程均转化为线性方程, 解都可求出. 值得注意的是, 若存在正整数  $m$ , 使得  $w_m = 0$ , 则可通过后续运算验证对所有的  $j > m$ , 有  $w_j = 0$ , 即(6)式截断到有限项  $m$ . 最后, 结合(2)(6)式可得到方程(1)的  $N$  孤子解.

## 2. 广义 Boussinesq 方程

广义 Boussinesq 方程的一般形式为<sup>[8]</sup>

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u + q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - s \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (11)$$

它是著名的 Boussinesq 方程和二阶 Benjamin-Ono 方程的扩展形式, 其中  $p, q, r$  和  $s$  为实常数. 当  $p=0$  时, 方程(11)即为 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - s \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (12)$$

当  $q=0$  时, 方程(11)化作二阶 Benjamin-Ono 方程

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u + r \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - s \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (13)$$

为求方程(11)的孤子解, 依据齐次平衡法, 导出如下未知函数变换:

$$u(x, t) = -\frac{6r}{s} (\ln w)_{xx}, \quad (14)$$

式中  $w = u(x, t)$  为待定. 变换(14)将方程(11)化作关于  $w$  的如下齐次微分方程:

$$w^3 (sw_{6x} - w_{2x,2t} - qw_{4x} - p^2 w_{4x} - 2pw_{3x,t}) + w^2 (2w_t w_{2x,t} + 6pw_x w_{2x,t} - 6sw_x w_{5x} + 4qw_x w_{3x} + 2w_{xt}^2 + 4p^2 w_x w_{3x} + 2sw_x^2 + 2pw_t w_{3x} + 6pw_{2x} w_{xt} + w_{2x} w_{2t} + 2w_x w_{x,2t} + 3p^2 w_{2x}^2 + 3qw_{2x}^2 - 3sw_x w_{4x}) + w ( -12qw_{2x} w_x^2 - 6sw_{2x}^3 + 18sw_x^2 w_{4x} - 2w_{2t} w_x^2 - 6w_t w_x w_{xt} - 12pw_x^2 w_{xt} - 12pw_x w_t w_{2x} - 12p^2 w_{2x} w_x^2 - 2w_t^2 w_{2x} ) + 6w_t^2 w_x^2 - 24sw_x^3 w_{3x} + 18sw_x^2 w_{2x}^2 + 6p^2 w_x^4 + 6qw_x^4 + 12pw_t w_x^3 = 0. \quad (15)$$

为方便起见, 方程(15)可记作

$$w^3 L \cdot w + w^2 N_1(w, w) +$$

$$+ wN_2(w, w, w) + N_3(w, w, w, w) = 0, \quad (16)$$

式中线性算子  $L$  及非线性算子  $N_1, N_2, N_3$  分别定义为

$$L \cdot = s \frac{\partial^6 \cdot}{\partial x^6} - \frac{\partial^4 \cdot}{\partial x^2 \partial t^2} - (q + p^2) \frac{\partial^4 \cdot}{\partial x^4} - 2p \frac{\partial^4 \cdot}{\partial x^3 \partial t} ,$$

$$\begin{aligned} N_1(f, g) = & 2f_{tx}g_{2x,t} + 6pf_xg_{2x,t} - 6sf_xg_{5x} + 4qf_xg_{3x} \\ & + 2f_{xt}g_{xt} + 4p^2f_xg_{3x} + 2sf_{3x}g_{3x} \\ & + 2pf_xg_{3x} + 6pf_{2x}g_{xt} + f_{2x}g_{2t} + 2f_xg_{x,2t} \\ & + 3p^2f_{2x}g_{2x} + 3qf_{2x}g_{2x} - 3sf_{2x}g_{4x} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2(f, g, h) = & -12qf_{2x}g_xh_x - 6sf_{2x}g_{2x}h_{2x} \\ & + 18sf_xg_xh_{4x} - 2f_{2t}g_xh_x - 6f_tg_xh_{xt} \\ & - 12pf_xg_xh_{xt} - 12pf_{xg}h_{2x} \\ & - 12p^2f_{2x}g_xh_x - 2f_tg_xh_{2x} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3(f, g, h, j) = & 6f_tg_xh_{jx} - 24sf_xg_xh_{j3x} \\ & + 18sf_xg_xh_{2xj_{2x}} + 6p^2f_xg_xh_{jx} \\ & + 6qf_xg_xh_{jx} + 12pf_xg_xh_{jx} . \end{aligned} \quad (17)$$

这里  $f, g, h, j$  均为辅助函数.

为获得方程(11)的孤子解, 采用上述分步确定拟解  $u(x, t)$  的办法, 将(6)式代入方程(15)中, 合并  $\epsilon$  的同次幂, 令  $\epsilon$  的系数为零, 得  $w_r$  的一系列递推方程

$$\epsilon: L \cdot w_1 = 0 , \quad (18)$$

$$\epsilon^2: L \cdot w_2 = -N_1(w_1, w_1) , \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3: L \cdot w_3 = & -3w_1L \cdot w_2 - 2w_1N_1(w_1, w_1) \\ & - N_1(w_1, w_2) - N_1(w_2, w_1) \\ & - N_2(w_1, w_1, w_1) , \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4: L \cdot w_4 = & -3w_1L \cdot w_3 - 3w_2L \cdot w_2 - 3w_1^2L \cdot w_2 \\ & - N_1(w_1, w_3) - N_1(w_3, w_1) \\ & - N_1(w_2, w_2) - 2w_1N_1(w_1, w_2) \\ & - 2w_1N_1(w_2, w_1) - 2w_2N_1(w_1, w_1) \\ & - w_1^2N_1(w_1, w_1) - N_2(w_1, w_1, w_2) \\ & - N_2(w_1, w_2, w_1) - N_2(w_2, w_1, w_1) \\ & - w_1N_2(w_1, w_1, w_1) \\ & - N_3(w_1, w_1, w_1, w_1) , \end{aligned} \quad (21)$$

.....

求解上述递推方程便可得到方程(11)的孤子解.

首先考虑方程(11)的孤波解, 取(10)式中  $N=1$ , 即令

$$\begin{aligned} w_1 &= \exp(\theta) , \\ \theta &= lx + vt + \xi_0 , \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $l, v$  待定,  $\xi_0$  为任意常数. 将(22)式代入线性方程(18), 得  $v = -l(p \pm \sqrt{sl^2 - q})$ ,  $l$  为任意常数.

将确定后的  $w_1$  代入方程(19)的等号右端, 方程(19)即变为

$$L \cdot w_2 = 0 . \quad (23)$$

解之, 易得  $w_2 = 0$ . 当  $r \geq 2$  时,  $w_r = 0$ . 不失一般性, 令  $\epsilon = 1$ , 由(6)、(14)和(22)式, 得到方程(11)的精确孤立波解

$$u(x, t) = \frac{3sl^2}{2r} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{l}{2} (x - pt \pm \sqrt{sl^2 - q}) t + \frac{\xi_0}{2} \right] . \quad (24)$$

如果取  $q = 0$ , (24)式化作

$$u(x, t) = -\frac{6(\gamma^2 + q)}{r} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\gamma - p(x - \gamma t) + \xi_0}{\sqrt{s}} \right] , \quad (25)$$

式中  $\gamma$  为任意常数. (25)式为 Benjamin-Ono 方程(13)的一个单向传播波. 若  $p = 0$ , (24)式化作

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{3(\gamma^2 + q)}{2r} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2 + q}{s}} \right. \\ & \left. \times (x \pm \gamma t) + \xi_0 \right] , \end{aligned} \quad (26)$$

式中  $\gamma$  仍为任意常数. (26)式正是 Boussinesq 方程(12)的双向孤立波解.

其次, 考虑方程(11)的双孤子解, 取(10)式中  $N=2$ , 令

$$\begin{aligned} w_1 &= \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) , \\ \theta_i &= l_i x + v_i t + \xi_{i0} \quad (i = 1, 2) , \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $l_i, v_i$  待定,  $\xi_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) 为任意常数. 将(27)式代入方程(18), 求得

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1(p \pm \sqrt{sl_1^2 - q}) , \\ l_2 &= -l_2(p \pm \sqrt{sl_2^2 - q}) \end{aligned} \quad (28)$$

和

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1(p \pm \sqrt{sl_1^2 - q}) , \\ l_2 &= -l_2(p \mp \sqrt{sl_2^2 - q}) . \end{aligned} \quad (29)$$

将(27)式连同(28)、(29)式代入方程(19), 得

$$\begin{aligned} L \cdot w_2 = & -12sl_1l_2(l_1 + l_2)[ -2sl_1^2 + 3sl_2l_1 \\ & - 2sl_2^2 \pm \sqrt{(sl_1^2 - q)(sl_2^2 - q)} + q ] \\ & \times \exp(\theta_1 + \theta_2) . \end{aligned} \quad (30)$$

求解上述线性方程, 得到

$$w_2 = a_{12} \exp(\theta_1 + \theta_2) , \quad (31)$$

式中

$$a_{12} = \frac{\sqrt{2l_2^2 - 3l_1l_2 + 2l_1^2} \mp \sqrt{(sl_2^2 - q)(sl_1^2 - q)} - q}{\sqrt{2l_2^2 + 3l_1l_2 + 2l_1^2} \mp \sqrt{(sl_2^2 - q)(sl_1^2 - q)} - q} . \quad (32)$$

将前两步所确定的  $w_1, w_2$  代入方程(20), 得

$$L \cdot w_3 = 0. \quad (33)$$

由此可得  $w_3 = 0$ , 将  $w_1, w_2, w_3$  代入后续递推方程

$$u(x, t) = -\frac{6s}{r} \frac{l_1^2 g_1 + l_2^2 g_2 + (l_1 - l_2)^2 g_1 g_2 + a_{12}(l_1 + l_2)^2 g_1 g_2 + a_{12}(l_1^2 g_1 g_2^2 + l_2^2 g_1^2 g_2)}{[1 + g_1 + g_2 + a_{12} g_1 g_2]}, \quad (34)$$

式中  $g_i = \exp(\theta_i)$  ( $i = 1, 2$ ),  $v_1, v_2, a_{12}$  分别由(28), (29)和(32)式给出. 如分别取  $p = 0$  和  $q = 0$ , 可得 Boussinesq 方程和 Benjamin-Ono 方程的双孤子解.

最后, 考虑三孤子解的情形. 取(10)式中  $N = 3$ , 令

$$\begin{aligned} w_1 &= \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3), \\ \theta_i &= l_i x + v_i t + \xi_{i0} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (35)$$

式中  $l_i, v_i$  待定,  $\xi_{i0}$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) 均为常数. 将(35)式代入方程(18), 求得

$$v_i = -l_i(p \pm \sqrt{sl_i^2 - q}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (36)$$

若仅考虑  $v_1, v_2, v_3$  同号情形, 将(35)(36)式代入方程(19), 得

$$\begin{aligned} w_2 &= a_{12} \exp(\theta_1 + \theta_2) + a_{13} \exp(\theta_1 + \theta_3) \\ &\quad + a_{23} \exp(\theta_2 + \theta_3), \end{aligned} \quad (37)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\cancel{2l_j^2 - 3l_i l_j + 2l_i^2} - \sqrt{(\cancel{sl_j^2 - q})(\cancel{sl_i^2 - q})} - q}{\cancel{2l_j^2 + 3l_i l_j + 2l_i^2} - \sqrt{(\cancel{sl_j^2 - q})(\cancel{sl_i^2 - q})} - q} \\ &\quad (1 \leq i < j \leq 3). \end{aligned} \quad (38)$$

将前两步所确定的  $w_1, w_2$  代入方程(20), 得到

$$w_3 = a_{12} a_{13} a_{23} \exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (39)$$

将  $w_1, w_2, w_3$  代入后续递推方程可知, 当  $r \geq 4$  时,  $w_r = 0$ . 同样地, 令  $\epsilon = 1$ , 齐次微分方程(15)的解为

$$u(x, t) = 1 + w_1 + w_2 + w_3, \quad (40)$$

式中  $w_1, w_2, w_3$  由(35)(37)(39)式给出.  $v_i, a_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) 由(36)(38)式分别决定,  $l_i, \xi_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为任意常数. 考虑  $v_1, v_2, v_3$  的其它三种情形, 也可按同样的步骤求得拟解. 最后, 由变换(14)式, 得到广义 Boussinesq 方程(11)的三孤子解.

### 3.bKK 方程

bKK 方程具有如下形式<sup>[9]</sup>:

$$\begin{aligned} 5\partial_x^{-1}u_{tt} + 5u_{xxt} - 15uu_{tt} - 15u_x\partial_x^{-1}u_t \\ - 45u^2u_x + \frac{75}{2}u_xu_{xx} + 15uu_{xxx} - u_{xxxxx} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

可知, 当  $r \geq 3$  时,  $w_r = 0$ . 这样, 由(6)(14)(27)及(31)式, 我们获得了方程(11)的双孤子解,

许多文献对 Kaup-Kupershmidt 方程进行了详细研究, 如文献[11]用直接假设方法给出了孤波解, 文献[12]用双线性方法给出了孤波解, 双孤子解以及三孤子解等. bKK 方程, 即双向 Kaup-Kupershmidt 方程, 也是数学物理中的重要模型, 却研究甚少. 本文将用分步确定拟解的方法给出其双向孤波解、双孤子解以及三孤子解. 需要注意的是, 文献[9]中 bKK 方程的一般形式(16)式有误, 本文进行了更正.

同广义 Boussinesq 方程, 依据齐次平衡法, 可导出方程的如下非线性变换:

$$u(x, t) = -(\ln w)_{xx}, \quad (42)$$

式中  $w = u(x, t)$  待定. 变换(42)式将(41)式化作

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{ u(4w_{6x} - 20w_{2t} - 20w_{3x,t}) + (20w_t w_{3x} \\ - 24w_x w_{5x} + 5w_{3x}^2 + 20w_t^2 + 60w_x w_{2x,t}) \} w^2 \\ + [30u(2w_{4x}w_x^2 - 2w_t w_x w_{2x} - w_x w_{2x} w_{3x} - 2w_x^2 w_{xt}) \\ - 15(4w_x^3 w_{3x} - 3w_x^2 w_{2x}^2 - 4w_t w_x^3)] w^4 \} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

为求得拟解  $u(x, t)$ , 只需令方程(43)大括号中分子为零即可, 由此得到关于  $w$  的齐次微分方程

$$\begin{aligned} w^3(4w_{6x} - 20w_{2t} - 20w_{3x,t}) + w^2(20w_t w_{3x} - 24w_x w_{5x} \\ + 5w_{3x}^2 + 20w_t^2 + 60w_x w_{2x,t}) + u(60w_{4x}w_x^2 \\ - 60w_t w_x w_{2x} - 30w_x w_{2x} w_{3x} - 60w_x^2 w_{xt}) \\ - 60w_x^3 w_{3x} + 45w_x^2 w_{2x}^2 + 60w_t w_x^3 = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

为方便起见, 方程(44)也可记作

$$\begin{aligned} w^3 L \cdot w + w^2 N_1(w, w) + w N_2(w, w, w) \\ + N_3(w, w, w, w) = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

式中线性算子  $L$  及非线性算子  $N_1, N_2, N_3$  分别定义为

$$\begin{aligned} L \cdot &= 4 \frac{\partial^6 \cdot}{\partial x^6} - 20 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - 20 \frac{\partial^4 \cdot}{\partial x^3 \partial t}, \\ N_1(f, g) &= 20f_t g_{3x} - 24f_x g_{5x} \\ &\quad + 5f_{3x} g_{3x} + 20f_t g_t + 60f_x g_{2x,t}, \\ N_2(f, g, h) &= 60f_x g_h h_{4x} - 60f_x g_t h_{2x} \\ &\quad - 30f_x g_{2x} h_{3x} - 60f_x g_x h_{xt}, \end{aligned}$$

$$N_3(f, g, h, j) = -60f_x g_x h_x j_{3x} + 45f_x g_x h_{2x} j_{2x} + 60f_t g_x h_x j_x, \quad (46)$$

式中  $f, g, h, j$  均为辅助函数.

为获得方程(41)的孤子解, 同样采用分步确定拟解  $u(x, t)$  的办法, 将(6)式代入(45)式中, 合并的同次幂, 令  $\epsilon$  的各次幂系数为零, 得  $w_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) 的一系列递推方程, 递推方程形式上与广义 Boussinesq 方程相同. 求解该递推方程(18)~(21), 得到拟解  $u(x, t)$ , 进而给出方程(41)的孤子解.

为获得 bKK 方程的孤波解, 令

$$\begin{aligned} w_1 &= \exp(\theta), \\ \theta &= lx + vt + \xi_0, \end{aligned} \quad (47)$$

代入方程(18), 求得

$$v = (-5 \pm 3\sqrt{5})l^3/10, \quad (48)$$

式中  $l, \xi_0$  为任意常数. 递推方程(19)化作

$$L \cdot w_2 = 9(-5 \pm 2\sqrt{5})l^6 \exp(2\theta). \quad (49)$$

求解上述方程, 有

$$w_2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{32} \exp(2\theta). \quad (50)$$

方程(20)化作

$$L \cdot w_3 = 0. \quad (51)$$

解之, 得  $w_3 = 0$ . 由递推方程可知, 当  $r \geq 3$  时,  $w_r = 0$ . 由(6)式, 求得方程(41)的拟解

$$u(x, t) = 1 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2. \quad (52)$$

不失一般性, 令  $\epsilon = 1$  (52)式代入(42)式得到 bKK 方程的双向孤立波解

$$u(x, t) = -\frac{l^2 \exp[\theta(1 + 4a \exp\theta + a \exp(2\theta))]}{[1 + \exp\theta + a \exp(2\theta)]}, \quad (53)$$

式中  $a = (3 \mp \sqrt{5})/32$ ,  $l, \xi_0$  为任意常数. 文献[9]比较方程(41)的双线性算子方程与 Ramini 方程相同, 后者的孤波解形式已知, 通过直接假设求得了孤波解(53), 见图 1 所示(为更清晰地表现孤子间相互作用过程, 本文中全为  $-u(x, t)$  的图像).

许多拥有双向孤波解的非线性方程其左行进波与右行进波的图像轮廓一致, 如 Boussinesq 方程的双向孤立波(26)式, 其左、右行进波均为常见的钟状孤立波, 即波形、波速一致. 而 bKK 方程比较特殊, 其双向孤波解(53)式波速不同, 波形也不同, 其右行进波为钟状孤立波, 而左行进波为驼峰状孤立波(又称为双峰状孤立波).

再研究 bKK 方程的双孤子解, 令

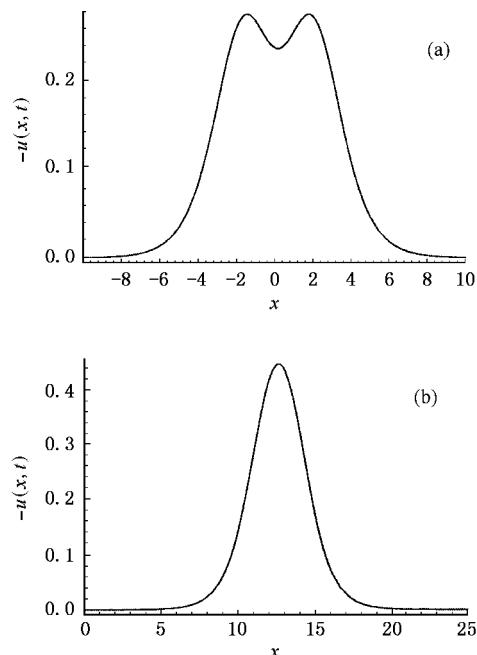


图 1  $l = 1, t = 10, \xi_0 = 0$  时 bKK 方程左行孤立波(a)与右行孤立波(b)

$$w_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2),$$

$$\theta_i = l_i x + v_i t + \xi_{i0} \quad (i = 1, 2), \quad (54)$$

代入方程(18), 求得

$$v_1 = (-5 \pm 3\sqrt{5})l_1^3/10,$$

$$v_2 = (-5 \mp 3\sqrt{5})l_2^3/10, \quad (55)$$

及

$$v_1 = (-5 \pm 3\sqrt{5})l_1^3/10,$$

$$v_2 = (-5 \mp 3\sqrt{5})l_2^3/10. \quad (56)$$

同广义 Boussinesq 方程的求解步骤, 可得方程(44)的两个解(取  $\epsilon = 1$ ),

$$u(x, t) = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4, \quad (57)$$

式中

$$w_2 = a \exp(2\theta_1) + b \exp(2\theta_2) + a_{12} \exp(\theta_1 + \theta_2),$$

$$w_3 = b_{12} \exp(2\theta_1 + \theta_2) + d_{12} \exp(\theta_1 + 2\theta_2),$$

$$w_4 = b_{12} d_{12} \exp(2\theta_1 + 2\theta_2). \quad (58)$$

第一个解的待定系数  $v_1, v_2, a, b, a_{12}, b_{12}, d_{12}$  由下式给出:

$$v_1 = -\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10} l_1^3,$$

$$v_2 = -\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10} l_2^3,$$

$$a = b = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{32},$$

$$a_{12} = \frac{4l_1^4 - (3 \pm \sqrt{5})l_1^2l_2^2 + 4l_2^4}{\chi(l_1 + l_2)[2l_1^2 + (1 \pm \sqrt{5})l_1l_2 + 2l_2^2]},$$

$$b_{12} = d_{12} = a \left( \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2} \right)^2 \frac{2l_1^2 - (1 \pm \sqrt{5})l_1l_2 + 2l_2^2}{2l_1^2 + (1 \pm \sqrt{5})l_1l_2 + 2l_2^2}, \quad (59)$$

由(42)(57)–(59)式可给出 bKK 方程两个追赶型碰撞的双孤子解, 见图 2 所示. 第二个解的待定系数如下:

$$v_1 = -\frac{5 \mp 3\sqrt{5}}{10}l_1^3,$$

$$v_2 = -\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}l_2^3,$$

$$a = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{32},$$

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{32},$$

$$a_{12} = \frac{4l_2^4 + (3 \pm \sqrt{5})l_1^2l_2^2 + (14 \mp 6\sqrt{5})l_1^4}{[\gamma + 2l_1l_2][\gamma + (3 \mp \sqrt{5})l_1l_2]},$$

$$b_{12} = \frac{a(\gamma - 2l_1l_2)[\gamma - (3 \mp \sqrt{5})l_1l_2]}{(\gamma + 2l_1l_2)[\gamma + (3 \mp \sqrt{5})l_1l_2]},$$

$$d_{12} = \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 b_{12}, \quad (60)$$

式中  $\gamma = 2l_2^2 + (3 \mp \sqrt{5})l_1^2$ ,  $l_1, l_2$  为任意常数. 由(42)(57)(58)(60)式可给出 bKK 方程两个迎面型碰撞双孤子解, 见图 3. 图 2(a)中任意常数  $l_1, l_2$

分别取为  $0.9, 1.25$ ,  $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$  图 2(b)中任意常数  $l_1, l_2$  分别取为  $0.5, 0.8$ ,  $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$ . 图 3 中  $l_1 = 0.5, l_2 = 0.9, \xi_{10} = \xi_{20} = 0$ .

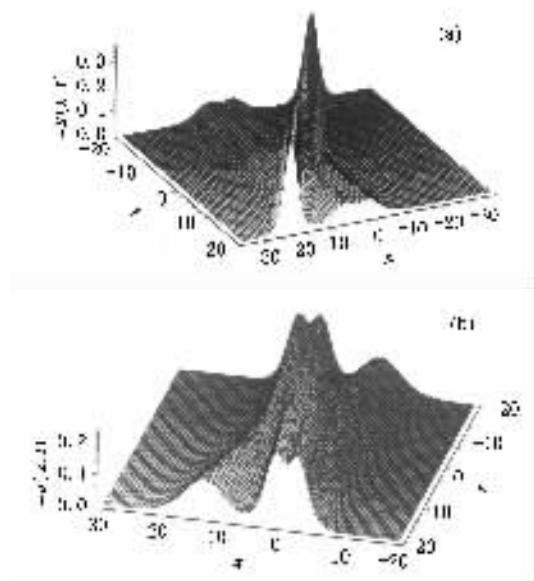


图 3 bKK 方程迎面型碰撞的双孤子图像 (a)右行孤子快于左行孤子 (b)左行孤子快于右行孤子

类似地, 按照前述步骤, 我们得到了 bKK 方程的三孤子解, 分步确定拟解得

$$u(x, t) = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 \quad (61)$$

式中

$$w_1 = 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3),$$

$$w_2 = a \exp(2\theta_1) + b \exp(2\theta_2) + c \exp(2\theta_3) + a_{12} \exp(\theta_1 + \theta_2) + a_{13} \exp(\theta_1 + \theta_3) + a_{23} \exp(\theta_2 + \theta_3),$$

$$w_3 = b_{12} \exp(\theta_1 + 2\theta_2) + b_{13} \exp(\theta_1 + 2\theta_3) + b_{23} \exp(\theta_2 + 2\theta_3) + d_{12} \exp(2\theta_1 + \theta_2) + d_{13} \exp(2\theta_1 + \theta_3) + d_{23} \exp(2\theta_2 + \theta_3) + c_{123} \exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3),$$

$$w_4 = b_{12} d_{12} \exp(2\theta_1 + 2\theta_2) + b_{13} d_{13} \exp(2\theta_1 + 2\theta_3) + b_{23} d_{23} \exp(2\theta_2 + 2\theta_3) + \frac{a_{23} d_{12} d_{13}}{a} \exp(2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \frac{a_{13} b_{12} d_{23}}{b} \exp(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3) + \frac{a_{12} b_{13} b_{23}}{c} \exp(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3),$$

$$w_5 = \frac{b_{12} d_{12} d_{13} d_{23}}{ab} \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3) + \frac{b_{13} d_{12} d_{13} b_{23}}{ac} \exp(2\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)$$

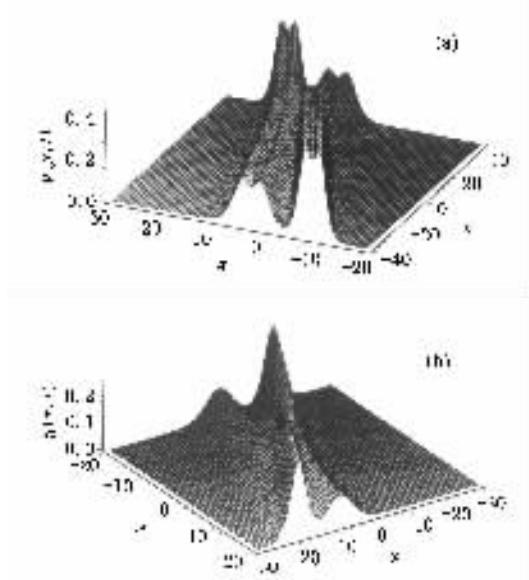


图 2 bKK 方程追趕型碰撞的双孤子图像 (a)两个孤子同时向左传播 (b)两个孤子同时向右传播

$$w_6 = \frac{b_{12} b_{13} b_{23} d_{12} d_{13} d_{23}}{abc} \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3),$$

$$\theta_i = l_i x + v_i t + \xi_{i0}, \quad (62)$$

式中系数  $a, b, c, l_i, v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq 3$ ) 与  $c_{123}$  均在附录 A—附录 D 中列出。这样, 由变换 (42) 式得到 bKK 方程的三孤子解, 见图 4 所示。

播,一个向右传播,  $l_1 = 0.7$ ,  $l_2 = 0.9$ ,  $l_3 = 0.5$ ; 图 4(d)中两个孤子向右传播,一个向左传播,  $l_1 = 0.6$ ,  $l_2 = 0.7$ ,  $l_3 = 0.8$ . 由图 2—图 4 可知, bKK 方程既存在追赶型(overtaking)碰撞的孤立子解, 也存在迎面型(head-on)碰撞的孤立子解, 在碰撞后都保持原有的波形、波速, 呈现出粒子特性. bKK 方程的孤波解、双孤子解及三孤子解结构比较特殊, 由文献[5—7]中给出的方法无法得到.

#### 4. 结论

本文采用分步确定拟解的原则,对齐次平衡法中确定拟解的步骤作了进一步改进,以广义 Boussinesq 方程和 bKK 方程为例,分别给出了孤波解、双孤子解以及三孤子解. 这两个发展方程都拥有双向传播的孤立子,但前者向左、向右行进的孤立子波形、波速一致,仅行进方向不同;而后者向左、向右行进的孤立子波形、波速都不同. 就作者所知,广义 Boussinesq 方程的三孤子解和 bKK 方程的双孤子解、三孤子解都是新的结果. 该方法简单、直接,可避免“中间表达式膨胀”的问题,同时能给出多种形式的孤子解,进一步拓展了齐次平衡法的应用范围.

在本文审稿过程中,我们注意到 Dye<sup>[10]</sup>对 bKK 方程作  
了进一步研究. 作者衷心感谢审阅者提出宝贵的意见和  
建议.

## 附录 A bKK 方程三孤子解的系数(所有孤子向左行进)

图4 bKK 方程的三孤子解 (a)三个孤子同时向左传播 (b)三个孤子同时向右传播 (c)两个孤子向左一个孤子向右传播 (d)两个孤子向右一个孤子向左传播

图 4(a) 中所有孤子向左传播,  $l_1 = 0.7$ ,  $l_2 = 0.9$ ,  $l_3 = 0.5$ ; 图 4(b) 中所有孤子向右传播,  $l_1 = 0.8$ ,  $l_2 = 0.5$ ,  $l_3 = 0.7$ ; 图 4(c) 中两个孤子向左传

## 附录 B bKK 方程三孤子解的系数(所有孤子向右行进)

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{10} l_i^3 \quad (i = 1 \dots 3), \\
 a = b = c &= \frac{3 + \sqrt{5}}{32}, \\
 a_{ij} &= \frac{4l_i^4 + 4l_j^4 - (3 - \sqrt{5})l_i^2 l_j^2}{2(l_i + l_j) \sqrt{2l_i^2 + 2l_j^2 + (1 - \sqrt{5})l_i l_j}} \quad (1 \leq i \leq j \leq 3), \\
 b_{ij} = d_{ij} &= \frac{a(l_i - l_j) \sqrt{2l_i^2 + 2l_j^2 - (1 - \sqrt{5})l_i l_j}}{(l_i + l_j) \sqrt{2l_i^2 + 2l_j^2 + (1 - \sqrt{5})l_i l_j}} \quad (1 \leq i \leq j \leq 3), \\
 c_{123} &= \{ \mathcal{A} [4l_1^4 + 4l_2^4 - (3 - \sqrt{5})l_1^2 l_2^2] l_1^4 l_2^4 + \mathcal{A} [4l_1^4 + 4l_3^4 - (3 - \sqrt{5})l_1^2 l_3^2] l_1^4 l_3^4 + \mathcal{A} [4l_2^4 + 4l_3^4 - (3 - \sqrt{5})l_2^2 l_3^2] l_2^4 l_3^4 \\
 &\quad - \mathcal{A} [3 - \sqrt{5}] l_1^6 + l_2^6 + l_3^6] l_1^2 l_2^2 l_3^2 + (1 - \sqrt{5}) l_1^2 l_2^4 + l_2^2 l_1^4 + l_3^2 l_2^4 + l_3^2 l_1^4 + l_3^2 l_2^2 + l_3^2 l_1^2 \} l_1^2 l_2^2 l_3^2 - \mathcal{A} [3 + \sqrt{5}] l_1^4 l_2^4 l_3^4 \mathcal{H} l_1 \\
 &\quad + l_2 \mathcal{H} l_1 + l_3 \mathcal{H} l_2 + l_3 \mathcal{H} l_1 l_2 \mathbb{I} [2l_1^2 + 2l_2^2 + (1 - \sqrt{5})l_1 l_2] \mathbb{I} [2l_1^2 + 2l_3^2 + (1 - \sqrt{5})l_1 l_3] \mathbb{I} [2l_2^2 + 2l_3^2 + (1 - \sqrt{5})l_2 l_3] \} \quad (B1)
 \end{aligned}$$

## 附录 C bKK 方程三孤子解的系数(两个孤子向左行进,另一个孤子向右行进)

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{10} l_i^3 \quad (i = 1, 2), \\
 v_3 &= \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{10} l_3^3, \\
 a = b &= \frac{3 - \sqrt{5}}{32}, \\
 c &= \frac{3 + \sqrt{5}}{32}, \\
 a_{12} &= \frac{4l_1^4 + 4l_2^4 - (3 + \sqrt{5})l_1^2 l_2^2}{2(l_1 + l_2) \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 + (1 + \sqrt{5})l_1 l_2}}, \\
 a_{i3} &= \frac{4l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^4 + (3 + \sqrt{5})l_i^2 l_3^2}{[2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + 2l_i l_3] \mathbb{I} [2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + (3 + \sqrt{5})l_i l_3]} \quad (i = 1, 2), \\
 b_{12} &= \frac{a(l_1 - l_2) \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 - (1 + \sqrt{5})l_1 l_2}}{(l_1 + l_2) \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 + (1 + \sqrt{5})l_1 l_2}}, \\
 b_{i3} &= \frac{\mathcal{A} [2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 - 2l_i l_3] \mathbb{I} [2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 - (3 + \sqrt{5})l_i l_3]}{[2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + 2l_i l_3] \mathbb{I} [2l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + (3 + \sqrt{5})l_i l_3]} \quad (i = 1, 2), \\
 d_{12} = b_{12}, \quad d_{13} &= \frac{a}{c} b_{13}, \quad d_{23} = \frac{b}{c} b_{23}, \\
 c_{123} &= \{ \mathcal{A} [4l_1^4 + 4l_2^4 - (3 + \sqrt{5})l_1^2 l_2^2] l_1^4 l_2^4 + \mathcal{A} [7 + 3\sqrt{5}] l_1^4 l_1^4 + (3 + \sqrt{5})l_3^4 + (3 + \sqrt{5})l_1^2 l_3^2] l_1^4 l_3^4 + \mathcal{A} [7 + 3\sqrt{5}] l_2^4 \\
 &\quad + (3 + \sqrt{5})l_3^4 + (3 + \sqrt{5})l_2^2 l_3^2] l_2^4 l_3^4 + \mathcal{A} [3 + \sqrt{5}] l_1^2 l_1^6 + 2l_2^6 - (47 + 21\sqrt{5})l_1^6] l_1^2 l_2^2 l_3^2 - \mathcal{A} [1 + \sqrt{5}] l_1^2 + l_2^2] l_1^4 l_2^4 l_3^2 \\
 &\quad - \mathcal{A} [11 + 5\sqrt{5}] l_1^2 + l_2^2] l_1^2 l_2^2 l_3^2 - \mathcal{A} [29 + 13\sqrt{5}] l_1^4 + l_2^4] l_1^2 l_2^2 l_3^4 + \mathcal{A} [11 + 5\sqrt{5}] l_1^4 l_2^4 l_3^4 \mathcal{H} l_1 + l_2 \mathcal{H} 2l_1^2 + 2l_2^2 \\
 &\quad + (1 + \sqrt{5})l_1 l_2 \mathbb{I} 2l_1^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + 2l_1 l_3 \mathbb{I} 2l_2^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + 2l_2 l_3 \mathbb{I} 2l_1^2 + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + (3 + \sqrt{5})l_1 l_3 \mathbb{I} 2l_2^2 \\
 &\quad + (3 + \sqrt{5})l_3^2 + (3 + \sqrt{5})l_2 l_3] \} \quad (C1)
 \end{aligned}$$

## 附录 D bKK 方程三孤子解的系数(两个孤子向右行进,另一个孤子向左行进)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{10} l_1^3, \\
 v_i &= \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{10} l_i^3 \quad (i = 2, 3), \\
 a &= \frac{3 - \sqrt{5}}{32}, \\
 b = c &= \frac{3 + \sqrt{5}}{32},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \frac{4l_2^4 + 4l_3^4 - (3 + \sqrt{5})l_2^2 l_3^2}{(2l_2 + l_3)[2l_2^2 + 2l_3^2 + (1 + \sqrt{5})l_2 l_3]}, \\
a_{1i} &= \frac{4l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_i^4 + (3 + \sqrt{5})l_1^2 l_i^2}{[2l_1^2 + (3 + \sqrt{5})l_1^2 + 2l_1 l_i][2l_1^2 + (3 + \sqrt{5})l_i^2 + (3 + \sqrt{5})l_1 l_i]} \quad (i = 2, 3), \\
b_{23} &= \frac{a(l_2 - l_3)[2l_2^2 + 2l_3^2 - (1 - \sqrt{5})l_2 l_3]}{(l_2 + l_3)[2l_2^2 + 2l_3^2 + (1 - \sqrt{5})l_2 l_3]}, \\
b_{1i} &= \frac{b[2l_i^2 + (3 - \sqrt{5})l_i^2 - 2l_1 l_i][2l_i^2 + (3 - \sqrt{5})l_1^2 - (3 - \sqrt{5})l_1 l_i]}{[2l_i^2 + (3 - \sqrt{5})l_i^2 + 2l_1 l_i][2l_i^2 + (3 - \sqrt{5})l_i^2 + (3 - \sqrt{5})l_1 l_i]} \quad (i = 2, 3), \\
d_{23} &= b_{23}, \quad d_{12} = \frac{a}{b}b_{12}, \quad d_{13} = \frac{a}{c}b_{13}, \\
c_{123} &= \{4(-47 + 21\sqrt{5})[4l_1^4 + (3 + \sqrt{5})l_2^4 + (3 + \sqrt{5})l_3^4]l_2^2 l_3^2 l_1^4 + 4(-47 + 21\sqrt{5})[4l_1^4 + (3 + \sqrt{5})l_3^4 + (3 + \sqrt{5})l_1^2 l_3^2]l_1^4 l_3^4 \\
&\quad - 8[4l_2^4 + 4l_3^4 - (3 - \sqrt{5})l_2^2 l_3^2]l_2^4 l_3^4 + 4(123 - 55\sqrt{5})[2l_1^6 - (47 + 21\sqrt{5})l_2^6 - (47 + 21\sqrt{5})l_3^6]l_1^2 l_2^2 l_3^2 + 4(11 - 5\sqrt{5}) \\
&\quad (l_2^2 + l_3^2)l_1^6 l_2^2 l_3^2 + 4(1 - \sqrt{5})(l_2^2 + l_3^2)l_1^2 l_2^4 l_3^4 + 4(29 - 13\sqrt{5})(l_2^4 + l_3^4)l_1^4 l_2^2 l_3^2 - 8(11 - 5\sqrt{5})l_1^4 l_2^4 l_3^4\}l_1 l_2 + l_3)[2l_2^2 \\
&\quad + 2l_3^2 + (1 - \sqrt{5})l_1 l_2 l_3][3(-\sqrt{5})l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2][-(3 - \sqrt{5})l_1^2 - 2l_3^2 - 2l_1 l_3][2l_2^2 + (3 - \sqrt{5})l_1^2 \\
&\quad + (3 - \sqrt{5})l_1 l_2 l_3^2 + (3 - \sqrt{5})l_1^2 + (3 - \sqrt{5})l_1 l_3]\}. \quad (D1)
\end{aligned}$$

在附录 A—附录 D 中,  $l_1 l_2 l_3$  为任意常数.

- 
- [1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1999 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Hirota R 1980 *Topics of Modern Physics* Bullough R K, Caudrey P J ed (Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag)
- [3] Zhou Z J, Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 262 [in Chinese] 周振江、李志斌 2003 物理学报 **52** 262]
- [4] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [5] Zhang J F 2000 *Applied Math. Mech.* **21** 171 [in Chinese] 张解放 2000 应用数学与力学 **21** 171]
- [6] Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 425
- [7] Lu J, Yan J R 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1428 [in Chinese] 卢竟、颜家壬 2002 物理学报 **51** 1428]
- [8] Zhou Y B, Li Z B 1996 *Journal of Lanzhou University* **32** 24 [in Chinese] 周宇斌、李志斌 1996 兰州大学学报 **32** 24]
- [9] Dye J M, Parker A 2001 *J. Math. Phys.* **42** 2567
- [10] Dye J M, Parker A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4921
- [11] Li Z B, Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 [in Chinese] 李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]
- [12] Hu X B 1999 *Phys. Lett. A* **269** 409
- [13] Zhang S Q, Xu G Q, Li Z B 2002 *Chin. Phys.* **11** 993
- [14] Na R 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1671 [in Chinese] 那仁满都 2002 物理学报 **51** 1671]
- [15] Fan E G 2000 *Phys. Lett. A* **277** 212
- [16] Hereman W, Banerjee P P, Korpel A 1986 *J. Phys. A* **19** 607
- [17] Xu G Q, Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1424 [in Chinese] 徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 1424]

# Bidirectional solitary wave solutions and soliton solutions for two nonlinear evolution equations<sup>\*</sup>

Xu Gui-Qiong<sup>1,2)</sup> Li Zhi-Bin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Information Administration, Shanghai University, Shanghai 200436, China

<sup>2)</sup> Department of Computer Science, East China Normal University, Shanghai 200062, China

(Received 23 October 2002; revised manuscript received 22 December 2002)

## Abstract

The homogeneous balance method for constructing solitary wave solutions and soliton solutions is further developed on obtaining quasi-solution by using step-by-step principle. The main advantage of the extended approach is to avoid the problem of "intermediate expression swell". The effectiveness of the method is demonstrated by application to the generalized Boussinesq equation and the bidirectional Kaup-Kupershmidt equation. The one-soliton, two-soliton and three-soliton solutions with multiple collisions are derived for these two equations with the assistance of Maple.

**Keywords** : homogeneous balance method, soliton solution, solitary wave solution, the generalized Boussinesq equation, the bidirectional Kaup-Kupershmidt equation

**PACC** : 0340K, 0290

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1998030600), and the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. ZD14012).