第 52 卷 第 8 期 2003 年 8 月
1000-3290/2003/52(08)/1882-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.8,August,2003

自旋为任意整数的传播子*

黄时中[1)2)3)] 张鹏飞[1)2)] 阮图南[1)2)] 吴 宁[1)4)] 郑志鹏[1)4)]

1)(中国高等科学技术中心(世界实验室),北京 100080)

2)(中国科学技术大学近代物理系和国家同步辐射实验室,合肥 230027)

3)(安徽师范大学物理系,芜湖 241000)

4)(中国科学院高能物理研究所,北京 100039)

(2002 年 10 月 18 日收到;2002 年 12 月 10 日收到修改稿)

以自旋为任意整数的自由粒子的波函数(Bargmann-Wigner 方程的解)为基础,进一步研究了自旋为任意整数的投影算符和传播子.证明了 Behrends 和 Fronsdal 所构造的投影算符是正确的.导出了自旋为任意整数的场的一般对易规则和费恩曼传播子的一般表达式.

关键词:整数自旋,投影算符,对易规则,费恩曼传播子

PACC:1100,1180C,1480

1. 引 言

在对诸如

$$b_1(1235)\rightarrow\omega+\pi,$$

$$\bar{p}p(^3P_2)\rightarrow f_2(1270)+\pi$$

$$a_3(2050)\rightarrow f_2(1270)+\pi,$$

$$H\rightarrow W^+W_-,$$

$$J/\Psi\rightarrow a_2(1320)+\rho,$$

等等高能物理过程进行数值分析时,需要采用自旋大于 1 的波函数、投影算符和费恩曼传播子[1—4].最近,我们[5—7]通过严格求解 Bargmann-Wigner[8] 方程,在坐标表象和动量表象中导出了自旋为任意整数和半整数的粒子的波函数,拓展了 Auvil-Brehm[9] 和 Chung[1] 等关于构造高自旋正能波函数的理论.在此基础上,我们对高自旋粒子的投影算符和传播子作了进一步研究,本文报道自旋为任意整数情形的研究结果,包括投影算符、对易规则、费恩曼传播子及其附加项的一般理论.

早在 1957 年,Behrends 和 Fronsdal[10,11] 就从 Klein-Gordon 方程和 Rarita-Schwinger[12] 方程出发,指出了高自旋投影算符的基本性质,并以此为基础提出了一种利用自旋为 1 的投影算符来构造自旋为任意整数的投影算符的方法,其要点是先在静止系中进行构造再推广到运动系.1965 年,Zemach[13] 提出了另一种在静止系中利用角动量张量来构造整数自旋投影算符的方法.最近,Chung[1,2] 以及 Filippini 等[4] 发现,Zemach 理论形式不正确,因为该形式本质上是非相对论性的.因此,Behrends 和 Fronsdal 所构造的投影算符(以下简称为 B-F 形式)是目前唯一可用的形式.考虑到 B-F 形式也是在静止系中构造的,我们认为有必要对其正确性进行证明,一个可靠的证明方式是寻找一种新方法直接导出该形式.本文将给出这种方法,即从我们所得到的波函数出发直接在运动系中导出自旋为任意整数的投影算符.我们的直接计算结果表明 B-F 形式是正确的.

就我们所知,目前只有比较完善的低自旋(指自旋小于 3/2)费恩曼传播子理论[14],而高自旋费恩曼传播子方面的研究结果则未见报道.在本文中我们将把低自旋费恩曼传播子理论拓展到高自旋情形,即利用我们所得到的波函数和投影算符,在坐标表象和动量表象中导出自旋为任意整数的自由粒子费恩曼传播子.在自由粒子费恩曼传播子的计算中,一个很重要的问题是,当自旋大于或等于 1 时,费恩曼

* 国家自然科学基金(批准号:19947001,90103010,19991480)、国家基础研究重大项目前期预研专项基金(批准号:2001CCB01000)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:97035807)、北京正负电子对撞机国家实验室、兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心、安徽省自然科学基金(批准号:01046202)和安徽省教育厅自然科学基金(批准号:2003KJ035ZD,2002HBL05)资助的课题.

传播子的表达式中出现附加项,此附加项的计算比较繁琐.我们已探索出一种逐步计算的方法,利用此方法可以导出自旋为任意整数的费恩曼传播子及其附加项的一般表达式.

2. 自旋为任意整数的投影算符

对于自旋为整数 n 的自由粒子,其波函数为 n 阶张量,可以表示为

$$A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)=\sum_k\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}[a_m(\boldsymbol{k})e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})e^{ikx}+b_m^+(\boldsymbol{k})\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}], \tag{1a}$$

式中 $e^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 和 $\bar{e}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 分别是动量表象中的正能和负能波函数,满足波动方程

$$(k^2+W^2)A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=0 \tag{1b}$$

和辅助条件

$$A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k}), \tag{1c}$$

$$k_\nu A^{\nu\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=0, \tag{1d}$$

$$A^{\nu\nu\nu_3\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=0. \tag{1e}$$

此处 W 表示粒子的静止质量,$A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 代表 $e^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 或 $\bar{e}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$. 我们已给出此方程的严格求解方法,解的形式可以表示为[6]

$$e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=\sum_{\lambda_n=1}^{1}\langle n-1,m-\lambda_n,1,\lambda_n\mid n-1,1,n,m\rangle e_{m-\lambda_n}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}}(\boldsymbol{k})e_{\lambda_n}^{\nu_n}(\boldsymbol{k})$$
$$=\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=-1}^{1}\delta(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n,m)\sqrt{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!}}\prod_{i=1}^{n}e_{\lambda_i}^{\nu_i}(\boldsymbol{k}), \tag{2a}$$

$$\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=\sum_{\lambda_n=1}^{1}\langle n-1,m-\lambda_n,1,\lambda_n\mid n-1,1,n,m\rangle \bar{e}_{m-\lambda_n}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}}(\boldsymbol{k})\bar{e}_{\lambda_n}^{\nu_n}(\boldsymbol{k})$$
$$=\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=-1}^{1}\delta(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n,m)\sqrt{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!}}\prod_{i=1}^{n}\bar{e}_{\lambda_i}^{\nu_i}(\boldsymbol{k}), \tag{2b}$$

式中

$$\bar{e}_{\lambda_i}^{\nu_i}(\boldsymbol{k})=g_{\nu_i\mu_i}(e_{\lambda_i}^{\mu_i}(\boldsymbol{k}))^*=(-1)^{\lambda_i}e_{-\lambda_i}^{\nu_i}(\boldsymbol{k})$$

$$g_{\nu_i\mu_i}=\mathrm{diag}\{1,1,1,-1\}. \tag{2c}$$

$e^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 和 $\bar{e}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 满足归一化条件

$$e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})\bar{e}_{m'}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})=\delta_{m,m'}. \tag{2d}$$

与自旋为 1 的情形相似,自旋为 n 的投影算符定义为

$$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)\equiv\sum_{m=-n}^{n}e_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\boldsymbol{k})\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k}). \tag{3}$$

由方程(1b)—(1e)和归一化条件(2d)可知,$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)$ 具有下列性质[10]

$$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_j\cdots\nu_n}(n,k)=P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_j\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(n,k), \tag{4a}$$

$$k_\nu P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)=0,$$
$$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu\nu\nu_3\cdots\nu_n}(n,k)=0, \tag{4b}$$

$$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)P^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(n,k)=P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}(n,k). \tag{4c}$$

利用 $e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 和 $\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(k)$ 的表达式(2a)和(2b),以及自旋为 1 的投影算符的如下表达式:

$$P^{\mu_1\nu_1}(k)=\sum_{\lambda=-1}^{1}e_\lambda^{\mu_1}(\boldsymbol{k})\bar{e}_\lambda^{\nu_1}(\boldsymbol{k})=\sum_{\lambda=-1}^{1}\bar{e}_\lambda^{\mu_1}(\boldsymbol{k})e_\lambda^{\nu_1}(\boldsymbol{k})=\delta_{\mu_1\nu_1}+\frac{k_{\mu_1}k_{\nu_1}}{W^2}, \tag{5}$$

可以直接计算出自旋为整数的投影算符的表达式. 例如,对于自旋为 2 的情形,利用

$$e_2^{\nu_1\nu_2}=e_{+1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2},$$

$$e_1^{\nu_1\nu_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}[e_{+1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}+e_0^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}],$$

$$e_0^{\nu_1\nu_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}[e_{+1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}+2e_0^{\nu_1}e_0^{\nu_2}+e_{-1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}],$$

$$e_{-1}^{\nu_1\nu_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}[e_0^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}+e_{-1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}],$$

$$e_{-2}^{\nu_1\nu_2}=e_{-1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}$$

和 $\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2}$ 的类似表达式,并注意到 $\bar{e}_\lambda^{\nu}=(-1)^\lambda e^{\nu}_{-\lambda}$,通过直接计算可以得到

$$
\begin{aligned}
P^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k) &= \sum_{m=-2}^{2}\bar{e}_m^{\mu_1\mu_2}e_m^{\nu_1\nu_2} \\
&= \bar{e}_2^{\mu_1\mu_2}e_2^{\nu_1\nu_2}+\bar{e}_1^{\mu_1\mu_2}e_1^{\nu_1\nu_2} \\
&\quad +\bar{e}_0^{\mu_1\mu_2}e_0^{\nu_1\nu_2}+\bar{e}_{-1}^{\mu_1\mu_2}e_{-1}^{\nu_1\nu_2}+\bar{e}_{-2}^{\mu_1\mu_2}e_{-2}^{\nu_1\nu_2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\bar{e}_\lambda^{\mu_1}e_\lambda^{\nu_1}\sum_{\lambda'}\bar{e}_{\lambda'}^{\mu_2}e_{\lambda'}^{\nu_2} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\bar{e}_\lambda^{\mu_1}e_\lambda^{\nu_2}\sum_{\lambda'}\bar{e}_{\lambda'}^{\mu_2}e_{\lambda'}^{\nu_1} \\
&\quad -\frac{1}{3}\sum_{\lambda}\bar{e}_\lambda^{\mu_1}e_\lambda^{\mu_2}\sum_{\lambda'}\bar{e}_{\lambda'}^{\nu_1}e_{\lambda'}^{\nu_2} \\
&= \frac{1}{2}P^{\mu_1\nu_1}P^{\mu_2\nu_2}+\frac{1}{2}P^{\mu_1\nu_2}P^{\mu_2\nu_1} \\
&\quad -\frac{1}{3}P^{\mu_1\mu_2}P^{\nu_1\nu_2}.
\end{aligned}
\tag{6a}
$$

由于 $P^{\mu_i\nu_i}=P^{\nu_i\mu_i}$,上式也可以改写成(添加 5 项非独立项)

$$
\begin{aligned}
P^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2)\\P(\nu_1\nu_2)}}\Big[&P^{\mu_1\nu_1}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k) \\
&-\frac{1}{3}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)\Big],
\end{aligned}
\tag{6b}
$$

式中,对 $P(\mu_1\mu_2)$ 求和指对 $(\mu_1\mu_2)$ 的所有排列求和,对 $P(\nu_1\nu_2)$ 求和指对 $(\nu_1\nu_2)$ 的所有排列求和 (下同). 同理,对于自旋为 3 的情形,利用

$$
\begin{aligned}
e_3^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= e_{+1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}, \\
e_2^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[e_{+1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+e_{+1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}+e_0^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}\right], \\
e_1^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \frac{1}{\sqrt{15}}\left[e_{+1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{+1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}\right. \\
&\quad \left.+2e_{+1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+2e_0^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+2e_0^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}\right], \\
e_0^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \frac{1}{\sqrt{10}}\left[e_{+1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_0^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{+1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}\right. \\
&\quad +2e_0^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+e_0^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3} \\
&\quad \left.+e_{-1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}\right], \\
e_{-1}^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \frac{1}{\sqrt{15}}\left[2e_0^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+2e_0^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}+2e_{-1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_0^{\nu_3}\right. \\
&\quad \left.+e_{+1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_{+1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{+1}^{\nu_3}\right], \\
e_{-2}^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[e_0^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_0^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}+e_{-1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_0^{\nu_3}\right], \\
e_{-3}^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= e_{-1}^{\nu_1}e_{-1}^{\nu_2}e_{-1}^{\nu_3}
\end{aligned}
$$

和 $\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}$ 的类似表达式,通过直接计算可以得到

$$
\begin{aligned}
&P^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k) \\
&= \sum_{m=-3}^{3}\bar{e}_m^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_m^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&= \bar{e}_3^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_3^{\nu_1\nu_2\nu_3}+\bar{e}_2^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_2^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&\quad +\bar{e}_1^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_1^{\nu_1\nu_2\nu_3}+\bar{e}_0^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_0^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&\quad +\bar{e}_{-1}^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_{-1}^{\nu_1\nu_2\nu_3}+\bar{e}_{-2}^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_{-2}^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&\quad +\bar{e}_{-3}^{\mu_1\mu_2\mu_3}e_{-3}^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&= \frac{1}{6}\left[P^{\mu_1\nu_1}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)\right. \\
&\quad +P^{\mu_1\nu_1}(k)P^{\mu_2\nu_3}(k)P^{\mu_3\nu_2}(k) \\
&\quad \left.+P^{\mu_1\nu_2}(k)P^{\mu_2\nu_1}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)\right] \\
&\quad +\frac{1}{6}\left[P^{\mu_1\nu_2}(k)P^{\mu_2\nu_3}(k)P^{\mu_3\nu_1}(k)\right. \\
&\quad +P^{\mu_1\nu_3}(k)P^{\mu_2\nu_1}(k)P^{\mu_3\nu_2}(k) \\
&\quad \left.+P^{\mu_1\nu_3}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_1}(k)\right] \\
&\quad -\frac{1}{15}\left[P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)\right. \\
&\quad +P^{\mu_1\mu_3}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_2\nu_3}(k) \\
&\quad \left.+P^{\mu_2\mu_3}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_1\nu_3}(k)\right] \\
&\quad -\frac{1}{15}\left[P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_3}(k)P^{\mu_3\nu_2}(k)\right. \\
&\quad +P^{\mu_1\mu_3}(k)P^{\nu_1\nu_3}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k) \\
&\quad \left.+P^{\mu_2\mu_3}(k)P^{\nu_1\nu_3}(k)P^{\mu_1\nu_2}(k)\right] \\
&\quad -\frac{1}{15}\left[P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_2\nu_3}(k)P^{\mu_3\nu_1}(k)\right. \\
&\quad +P^{\mu_1\mu_3}(k)P^{\nu_2\nu_3}(k)P^{\mu_2\nu_1}(k) \\
&\quad \left.+P^{\mu_2\mu_3}(k)P^{\nu_2\nu_3}(k)P^{\mu_1\nu_1}(k)\right].
\end{aligned}
\tag{7a}
$$

或者利用 $P^{\mu_i\nu_i}=P^{\nu_i\mu_i}$ 改写成(添加 57 项非独立项)

$$
\begin{aligned}
&P^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k) \\
&=\frac{1}{36}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3)}}\Big[P^{\mu_1\nu_1}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k) \\
&\quad -\frac{3}{5}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)\Big].
\end{aligned}
\tag{7b}
$$

这种计算法可以推广到自旋为 4,5,…的情形,其优点是直接给出投影算符表达式中的独立项(如(6a)和(7a)式). 表达式(6b),(7b)等与 Behrends 和 Fronsdal[10,11] 依据投影算符的性质(方程(4))所构造出的下述投影算符形式一致:

$$P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k) = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\\P(\nu_1\nu_2\cdots\nu_n)}} \Bigg[\prod_{i=1}^{n} P^{\mu_i\nu_i}(k) + A_1 P^{\mu_1\mu_2}(k) P^{\nu_1\nu_2}(k) \prod_{i=3}^{n} P^{\mu_i\nu_i}(k) + \cdots + \begin{cases} A_{n/2} P^{\mu_1\mu_2}(k) P^{\nu_1\nu_2}(k)\cdots P^{\mu_{n-1}\mu_n}(k) P^{\nu_{n-1}\nu_n}(k) & (n\ 为偶数) \\ A_{(n-1)/2} P^{\mu_1\mu_2}(k) P^{\nu_1\nu_2}(k)\cdots P^{\mu_{n-2}\mu_{n-1}}(k) P^{\nu_{n-2}\nu_{n-1}}(k) P^{\mu_n\nu_n}(k) & (n\ 为奇数) \end{cases} \Bigg], \tag{8}$$

式中

$$A_r(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2r+1)}. \tag{9}$$

这就证明了 B-F 投影算符形式是正确的.

3. 自旋为整数的传播子

3.1. 自旋为 2 的传播子

我们先按照自旋为 1 的传播子的计算方法[14]，计算自旋为 2 的传播子.自旋为 2 的波函数为

$$A^{\nu_1\nu_2}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{m=-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left[a_m(\boldsymbol{k}) e_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) e^{ikx} + b_m^+(\boldsymbol{k}) \bar{e}_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} \right], \tag{10}$$

式中

$$e_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} e_{\lambda_1}^{\nu_1}(\boldsymbol{k}) e_{\lambda_2}^{\nu_2}(\boldsymbol{k}) \times \langle 1,\lambda_1;1,\lambda_2 \mid 1,1,2,m\rangle, \tag{11a}$$

$$\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \bar{e}_{\lambda_1}^{\nu_1}(\boldsymbol{k}) \bar{e}_{\lambda_2}^{\nu_2}(\boldsymbol{k}) \times \langle 1,\lambda_1;1,\lambda_2 \mid 1,1,2,m\rangle, \tag{11b}$$

满足正交归一关系

$$\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) e_{m'}^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) = \delta_{m,m'}, \quad m,m' = 2,1,0,-1,-2. \tag{12}$$

利用自旋为 2 的投影算符表达式(6)和下列振幅量子化条件:

$$[a_m(\boldsymbol{k}), a_{m'}^+(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{mm'} = [b_m(\boldsymbol{k}), b_{m'}^+(\boldsymbol{k}')], \tag{13a}$$

$$[a_m(\boldsymbol{k}), a_{m'}(\boldsymbol{k}')] = [b_m(\boldsymbol{k}), b_{m'}(\boldsymbol{k}')] = [a_m(\boldsymbol{k}), b_{m'}(\boldsymbol{k}')] = [a_m^+(\boldsymbol{k}), b_{m'}(\boldsymbol{k}')] = 0, \tag{13b}$$

$$[a_m^+(\boldsymbol{k}), a_{m'}^+(\boldsymbol{k}')] = [b_m^+(\boldsymbol{k}), b_{m'}^+(\boldsymbol{k}')] = [a_m(\boldsymbol{k}), b_{m'}^+(\boldsymbol{k}')] = [a_m^+(\boldsymbol{k}), b_{m'}^+(\boldsymbol{k}')] = 0, \tag{13c}$$

以及共轭场的表达式

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x) = g_{\nu_1\mu_2} g_{\nu_1\mu_2} (A_m^{\mu_1\mu_2}(\boldsymbol{k}))^+ = \sum_{\boldsymbol{k},m} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left[a_m^+(\boldsymbol{k}) \bar{e}_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} + b_m(\boldsymbol{k}) e_m^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \right], \tag{14}$$

可以导出如下一般对易规则

$$[A^{\mu_1\mu_2}(x), \bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')] = i\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta(x-x'), \tag{15}$$

或者

$$[A^{\mu_1\mu_2}(x)^{(-)}, \bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')^{(+)}] = i\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(+)}(x-x'), \tag{16a}$$

$$[A^{\mu_1\mu_2}(x)^{(+)}, \bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')^{(-)}] = i\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(-)}(x-x'), \tag{16b}$$

式中

$$A^{\mu_1\mu_2}(x)^{(-)} = \sum_{km} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_m^{\mu_1\mu_2}(\boldsymbol{k}) a_m(\boldsymbol{k}) e^{ikx}, \tag{17a}$$

$$A^{\mu_1\mu_2}(x)^{(+)} = \sum_{km} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \bar{e}_m^{\mu_1\mu_2}(\boldsymbol{k}) b_m^+(\boldsymbol{k}) e^{-ikx}, \tag{17b}$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x)^{(+)} = \sum_{km} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \bar{e}_m^{\nu_1\nu_2} a_m^+(\boldsymbol{k}) e^{-ikx}, \tag{17c}$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x)^{(-)} = \sum_{km} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_m^{\nu_1\nu_2} b_m(\boldsymbol{k}) e^{ikx}, \tag{17d}$$

$$i\Delta(x-x') = i\Delta^{(+)}(x-x') + i\Delta^{(-)}(x-x'), \tag{18a}$$

$$i\Delta^{(+)}(x-x') = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2\omega V} e^{ik(x-x')}, \quad i\Delta^{(-)}(x-x') = -\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2\omega V} e^{-ik(x-x')}, \tag{18b}$$

$$\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2)\\P(\nu_1\nu_2)}} \left[\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2} - \frac{1}{3}\hat{P}^{\mu_1\mu_2}\hat{P}^{\nu_1\nu_2} \right], \quad \hat{P}^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{W^2}. \tag{19}$$

与自旋为 1 的情形相似,自旋为 2 的费恩曼传播子定义为

$$\begin{aligned}&\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x-x')\\&\equiv\langle 0\mid TA^{\mu_1\mu_2}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')\mid 0\rangle\\&=\begin{cases}\langle 0\mid A^{\mu_1\mu_2}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')\mid 0\rangle & t>t',\\ \langle 0\mid \bar{A}^{\nu_1\nu_2}(x')A^{\mu_1\mu_2}(x)\mid 0\rangle & t<t'.\end{cases}\end{aligned}\tag{20}$$

利用一般对易规则(16),容易得到

$$\begin{aligned}&\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x-x')\\&=\mathrm{i}\theta(t-t')\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(+)}(x-x')\\&\quad-\mathrm{i}\theta(t'-t)\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(-)}(x-x'),\end{aligned}\tag{21a}$$

或者

$$\begin{aligned}\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x)&=\mathrm{i}\theta(t)\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(+)}(x)\\&\quad-\mathrm{i}\theta(-t)\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta^{(-)}(x),\end{aligned}\tag{21b}$$

借助下列基本关系:

$$\partial_t\theta(t)=\delta(t),$$

$$\delta(t)[\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)]=0,$$

$$\dot{\delta}(t)[\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)]=\delta^{(4)}(x),$$

可以导出

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}[\theta(t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\Delta^{(+)}(x)-\theta(-t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\Delta^{(-)}(x)]\\&=\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\Delta_F(x)+\frac{\mathrm{i}}{W^2}\{\delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}\}\delta^{(4)}(x),\end{aligned}\tag{22a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}[\theta(t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\Delta^{(+)}(x)-\theta(-t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\Delta^{(-)}(x)]\\&=\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\Delta_F(x)+\frac{\mathrm{i}}{W^2}\{\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24}\\&\quad+\delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\}\delta^{(4)}(x),\end{aligned}\tag{22b}$$

其中 $\Delta_F(x)=\mathrm{i}\theta(t)\Delta^{(+)}(x)-\mathrm{i}\theta(-t)\Delta^{(-)}(x)$. 由此得到坐标表象中自旋为 2 的费恩曼传播子

$$\begin{aligned}\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x-x')&=\hat{P}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\Delta_F(x-x')\\&\quad+\hat{K}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)\delta^{(4)}(x-x'),\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-x')&=\mathrm{i}\theta(t-t')\Delta^{(+)}(x-x')\\&\quad-\mathrm{i}\theta(t'-t)\Delta^{(-)}(x-x'),\end{aligned}\tag{24a}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2)&=\frac{\mathrm{i}}{4W^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2)\\P(\nu_1\nu_2)}}\Big[\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24}\\&\quad+\delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}-\frac{1}{3}\{\delta_{\nu_14}\delta_{\nu_24}\delta_{\mu_1\mu_2}\\&\quad+\delta_{\mu_14}\delta_{\mu_24}\hat{P}^{\nu_1\nu_2}\}\Big].\end{aligned}\tag{24b}$$

再利用

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Delta_F(k),$$

$$\Delta_F(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2+W^2-\mathrm{i}\varepsilon}\tag{25}$$

又可得

$$\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k),\tag{26a}$$

$$\begin{aligned}\Delta_F^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k)&=P^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k)\frac{-\mathrm{i}}{k^2+W^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\&\quad+K^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k),\end{aligned}\tag{26b}$$

式中

$$\begin{aligned}K^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(2,k)&=\frac{\mathrm{i}}{4W^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2)\\P(\nu_1\nu_2)}}\Big[\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24}\\&\quad+[\delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}]P^{\mu_2\nu_2}-\frac{1}{3}\{\delta_{\nu_14}\delta_{\nu_24}\delta_{\mu_1\mu_2}\\&\quad+\delta_{\mu_14}\delta_{\mu_24}P^{\nu_1\nu_2}\}\Big].\end{aligned}\tag{27}$$

此即动量表象中自旋为 2 的费恩曼传播子.

3.2. 自旋为 3 的传播子

下面进一步计算自旋为 3 的费恩曼传播子. 自旋为 3 的波函数为

$$\begin{aligned}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)&=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{m=-3}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}[a_m(\boldsymbol{k})e_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\\&\quad+b_m^+(\boldsymbol{k})\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}],\end{aligned}\tag{28}$$

其中

$$\begin{aligned}e_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})&=\sum_{\lambda_3}e_{m-\lambda_3}^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k})e_{\lambda_3}^{\nu_3}(\boldsymbol{k})\\&\quad\times\langle 2,m-\lambda_3;1,\lambda_3\mid 2,1,3,m\rangle,\end{aligned}\tag{29a}$$

$$\begin{aligned}\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})&=\sum_{\lambda_3}\bar{e}_{m-\lambda_3}^{\nu_1\nu_2}(\boldsymbol{k})\bar{e}_{\lambda_3}^{\nu_3}(\boldsymbol{k})\\&\quad\times\langle 2,m-\lambda_3;1,\lambda_3\mid 2,1,3,m\rangle,\end{aligned}\tag{29b}$$

满足正交归一关系

$$\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})e_{m'}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})=\delta_{m,m'},$$

$$m,m'=3,2,1,0,-1,-2,-3.\tag{30}$$

利用自旋为 3 的投影算符表达式(7)和量子化条件(13)以及共轭场的表达式

$$\begin{aligned}\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)&=g_{\nu_1\mu_1}g_{\nu_1\mu_2}g_{\nu_3\mu_3}(A_m^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\boldsymbol{k}))^+\\&=\sum_{\boldsymbol{k},m}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}[a_m^+(\boldsymbol{k})\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\\&\quad+b_m(\boldsymbol{k})e_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}],\end{aligned}\tag{31}$$

可以导出如下一般对易规则

$$\begin{aligned}&[A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x),\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')]\\&=\mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta(x-x'),\end{aligned}\tag{32}$$

或者

$$[A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)^{(-)},\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')^{(+)}] = \mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta^{(+)}(x-x'), \quad (33a)$$

$$[A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)^{(+)},\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')^{(-)}] = \mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta^{(-)}(x-x'), \quad (33b)$$

其中

$$A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)^{(-)} = \sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}e_m^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\boldsymbol{k})a_m(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad (34a)$$

$$A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)^{(+)} = \sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\bar{e}_m^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\boldsymbol{k})b_m^{+}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \quad (34b)$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)^{(+)} = \sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}a_m^{+}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \quad (34c)$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)^{(-)} = \sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}e_m^{\nu_1\nu_2\nu_3}b_m(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad (34d)$$

$$\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3) = \frac{1}{36}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3)}}[\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3} - \frac{3}{5}\hat{P}^{\mu_1\mu_2}\hat{P}^{\nu_1\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3}]. \quad (35)$$

自旋为 3 的费恩曼传播子定义为

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(x-x') \equiv \langle 0|TA^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')|0\rangle = \begin{cases}\langle 0|A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')|0\rangle & (t>t'),\\ \langle 0|\bar{A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x')A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x)|0\rangle & (t<t').\end{cases} \quad (36)$$

利用一般对易规则(33),不难得到

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(x-x') = \mathrm{i}\theta(t-t')\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta^{(+)}(x-x') - \mathrm{i}\theta(t'-t)\hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta^{(-)}(x-x'). \quad (37)$$

以(22a)和(22b)式为基础,可以进一步导出

$$[\mathrm{i}\theta(t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3}\Delta^{(+)}(x) - \mathrm{i}\theta(-t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3}\Delta^{(-)}(x)] = \hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3}\Delta_{\mathrm{F}}(x) + \frac{\mathrm{i}}{W}\{[\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24} + \delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}] \times \hat{P}^{\mu_3\nu_3} + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34}\}\delta^{(4)}(x). \quad (38)$$

由此得到坐标表象中自旋为 3 的费恩曼传播子

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(x-x') = \hat{P}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') + \hat{K}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3)\delta^{(4)}(x-x'), \quad (39)$$

式中

$$\hat{K}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3) = \frac{\mathrm{i}}{36W^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3)}}\Big\{(\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24} + \delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}\hat{P}^{\mu_2\nu_2})\hat{P}^{\mu_3\nu_3} + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34} - \frac{3}{5}[(\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_14}\delta_{\nu_24} + \delta_{\mu_14}\delta_{\mu_24}\hat{P}^{\nu_1\nu_2})\hat{P}^{\mu_3\nu_3} + \delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34}]\Big\}. \quad (40)$$

利用(25)式又可得

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k), \quad (41a)$$

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k) = P^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k)\frac{-\mathrm{i}}{k^2+W^2-\mathrm{i}\varepsilon} + K^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3,k), \quad (41b)$$

其中

$$K^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1\nu_2\nu_3}(3) = \frac{\mathrm{i}}{36W^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3)}}\Big\{(\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24} + \delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14}P^{\mu_2\nu_2})P^{\mu_3\nu_3} + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34} - \frac{3}{5}[(\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_14}\delta_{\nu_24} + \delta_{\mu_14}\delta_{\mu_24}\hat{P}^{\nu_1\nu_2})P^{\mu_3\nu_3} + \delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34}]\Big\}. \quad (42)$$

此即动量表象中自旋为 3 的费恩曼传播子.

3.3. 自旋为任意整数 n 的传播子

现将自旋为 1,2,3 的传播子的计算方法推广到自旋为任意整数 n 的情形.利用自旋为 n 的波函数(1a)、投影算符表达式(8)、量子化条件(13)以及共轭场的表达式

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = g_{\nu_1\mu_1}g_{\nu_1\mu_2}\cdots g_{\nu_n\mu_n}(A_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\boldsymbol{k}))^{+} = \sum_{\boldsymbol{k},m}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}[a_m^{+}(\boldsymbol{k})\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b_m(\boldsymbol{k})e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}], \quad (43)$$

可以得到如下一般对易规则

$$[A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x),\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')] = \mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta(x-x'), \quad (44)$$

或者

$$[A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)^{(-)},\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')^{(+)}] = \mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta^{(+)}(x-x'), \quad (45a)$$

$$[A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)^{(+)},\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')^{(-)}] = \mathrm{i}\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta^{(-)}(x-x'), \quad (45b)$$

式中

$$A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)^{(-)}=\sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}e_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\boldsymbol{k})a_m(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\tag{46a}$$

$$A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)^{(+)}=\sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\bar{e}_m^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\boldsymbol{k})b_m^{+}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\tag{46b}$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)^{(+)}=\sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\bar{e}_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}a_m^{+}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\tag{46c}$$

$$\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)^{(-)}=\sum_{km}\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}e_m^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}b_m(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\tag{46d}$$

$$\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)=\left(\frac{1}{n\,!}\right)^2\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\\P(\nu_1\nu_2\cdots\nu_n)}}\Bigg[\prod_{i=1}^{n}\hat{P}^{\mu_i\nu_i}+A_1(n)\hat{P}^{\mu_1\mu_2}\hat{P}^{\nu_1\nu_2}\prod_{i=3}^{n}\hat{P}^{\mu_i\nu_i}+\cdots+\begin{cases}A_{n/2}(n)\hat{P}^{\mu_1\mu_2}\hat{P}^{\nu_1\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_{n-1}\mu_n}\hat{P}^{\nu_{n-1}\nu_n} & (n\text{ 为偶数})\\A_{(n-1)/2}(n)\hat{P}^{\mu_1\mu_2}\hat{P}^{\nu_1\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_{n-2}\mu_{n-1}}\hat{P}^{\nu_{n-2}\nu_{n-1}}\hat{P}^{\mu_n\nu_n} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}\Bigg].\tag{47}$$

自旋为 n 的费恩曼传播子定义为

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x-x')\\&\equiv\langle 0\mid TA^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')\mid 0\rangle\\&=\begin{cases}\langle 0\mid A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')\mid 0\rangle & t>t',\\\langle 0\mid \bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x')A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)\mid 0\rangle & t<t'.\end{cases}\end{aligned}\tag{48}$$

利用对易规则(45)不难得到

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x-x')\\&=\mathrm{i}\theta(t-t')\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta^{(+)}(x-x')\\&\quad-\mathrm{i}\theta(t'-t)\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta^{(-)}(x-x').\end{aligned}\tag{49a}$$

此式可以改写为

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x-x')\\&=\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\Delta_{\mathrm{F}}(x-x')\\&\quad+\hat{K}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)\delta^{(4)}(x-x').\end{aligned}\tag{49b}$$

此即坐标表象中自旋为任意整数的费恩曼传播子的一般表达式,其中第二项是将 $\hat{P}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)$ 从 θ 函数对易过去而产生的附加项.在(22a),(22b)和(38)式的基础上,通过逐步计算可以一般地导出将 $\hat{P}^{\mu_1\nu_2}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_n\nu_n}$ 从 θ 函数对易过去而产生的附加项,即

$$\begin{aligned}&[\mathrm{i}\theta(t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_n\nu_n}\Delta^{(+)}(x)\\&-\mathrm{i}\theta(-t)\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_n\nu_n}\Delta^{(-)}(x)]\\&=\hat{P}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}\cdots\hat{P}^{\mu_n\nu_n}\Delta_{\mathrm{F}}(x)\\&\quad+\frac{\mathrm{i}}{W^2}[\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_n\nu_n}]\delta^{(4)}(x),\end{aligned}\tag{50}$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{B}^{\mu_1\nu_1}&=\delta_{\mu_14}\delta_{\nu_14},\\\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}&=\hat{B}^{\mu_1\nu_1}\hat{P}^{\mu_2\nu_2}+\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_24}\delta_{\nu_24},\\\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3}&=\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}\hat{P}^{\mu_3\nu_3}\\&\quad+\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\mu_34}\delta_{\nu_34},\cdots,\\\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_n\nu_n}&=\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\hat{P}^{\mu_n\nu_n}\\&\quad+\delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\delta_{\mu_n4}\delta_{\nu_n4}.\end{aligned}\tag{51}$$

由此得到

$$\hat{K}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n)=\frac{\mathrm{i}}{(n\,!W)^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\\P(\nu_1\nu_2\cdots\nu_n)}}\Bigg[\hat{B}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_n\nu_n}+A_1(n)\hat{B}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4\cdots\mu_n\nu_n}+\cdots+\begin{cases}A_{n/2}(n)\hat{B}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\cdots\mu_{n-1}\mu_n\nu_{n-1}\nu_n} & (n\text{ 为偶数})\\A_{(n-1)/2}(n)\hat{B}^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\cdots\mu_{n-2}\mu_{n-1}\nu_{n-2}\nu_{n-1}\mu_n\nu_n} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}\Bigg].\tag{52}$$

利用(25)式又可得

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k),\end{aligned}\tag{53a}$$

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)\\&=P^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k)\frac{-\mathrm{i}}{k^2+W^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\&\quad+K^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k),\end{aligned}\tag{53b}$$

式中

$$K^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(n,k) = \frac{\mathrm{i}}{(n!W)^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\\P(\nu_1\nu_2\cdots\nu_n)}}\Bigg[B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_n\nu_n} + A_1(n)B^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4\cdots\mu_n\nu_n} + \cdots + \begin{cases} A_{n/2}(n)B^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\cdots\mu_{n-2}\mu_{n-1}\nu_{n-2}\nu_{n-1}\mu_n\nu_n} & (n\text{ 为偶数}) \\ A_{(n-1)/2}(n)B^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\cdots\mu_{n-2}\mu_{n-1}\nu_{n-2}\nu_{n-1}\mu_n\nu_n} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}\Bigg]. \tag{54}$$

而

$$\begin{aligned}
B^{\mu_1\nu_1} &= \delta_{\mu_1 4}\delta_{\nu_1 4},\\
B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} &= B^{\mu_1\nu_1}P^{\mu_2\nu_2} + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2 4}\delta_{\nu_2 4},\\
B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} &= B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}P^{\mu_3\nu_3}\\
&\quad + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\mu_3 4}\delta_{\nu_3 4},\cdots,\\
B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}\mu_n\nu_n} &= B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}}P^{\mu_n\nu_n}\\
&\quad + \delta_{\mu_1\nu_1}\delta_{\mu_2\nu_2}\cdots\delta_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\delta_{\mu_n 4}\delta_{\nu_n 4}.
\end{aligned} \tag{55}$$

公式(53b)即动量表象中自旋为任意整数的费恩曼传播子的一般表达式. 作为(53b)式的应用，我们在最后给出自旋为 4 的费恩曼传播子的具体表达式

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathrm F}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(4,k)\\
&= P^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(4,k)\frac{-\mathrm{i}}{k^2+W^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\
&\quad + K^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(4,k),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&P^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(4,k)\\
&= \left(\frac{1}{4!}\right)^2\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)}}\Big[P^{\mu_1\nu_1}(k)P^{\mu_2\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)P^{\mu_4\nu_4}(k)\\
&\quad - \frac{6}{7}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_3\nu_3}(k)P^{\mu_4\nu_4}(k)\\
&\quad + \frac{3}{35}P^{\mu_1\mu_2}(k)P^{\nu_1\nu_2}(k)P^{\mu_3\mu_4}(k)P^{\nu_3\nu_4}(k)\Big],\\
&K^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(4,k)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{(4!W)^2}\sum_{\substack{P(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)\\P(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)}}\Big[B^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4}\\
&\quad - \frac{6}{7}B^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4}\\
&\quad + \frac{3}{35}B^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2\mu_3\mu_4\nu_3\nu_4}\Big].
\end{aligned}$$

[1] Chung S U 1998 *Phys*. *Rev*. D **57** 431

[2] Chung S U 1993 *Phys*. *Rev*. D **48** 1225

[3] Chung S U *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. D **65** 072001

[4] Filippini V *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. D **51** 2247

[5] Huang S Z *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1456 (in Chinese) [黄时中等 2001 物理学报 **50** 1456]

[6] Huang S Z *et al* 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 561

[7] Huang S Z *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 25

[8] Bargmann V, Wigner E P 1948 *Proc*. *Natl*. *Acad*. *Sci*. (USA) **34** 211

[9] Auvil P R, Brehm J J 1966 *Phys*. *Rev*. **145** 1152

[10] Behrends R E, Fronsdal C 1957 *Phys*. *Rev*. **106** 345

[11] Fronsdal C 1958 *Nuovo Cimento* (Suppl) **9** 416

[12] Rarita W, Schwinger J 1941 *Phys*. *Rev*. **60** 61

[13] Zemach C 1965 *Phys*. *Rev*. B **140** 97；1965 *Phys*. *Rev* B **140** 109

[14] Lurie D 1968 *Particles and Fields* (New York：John Wiley & Sons) Chap 4 p143

The propagator for an arbitrary integral spin*

Huang Shi-Zhong[1)2)3)] Zhang Peng-Fei[1)2)] Ruan Tu-Nan[1)2)] Wu Ning[1)4)] Zheng Zhi-Peng[1)4)]

[1)] (*China Center of Advanced Science and Technology* (*World Laboratory*), *Beijing* 100080, *China*)

[2)] (*Department of Modern Physics and National Synchrotron Radiation Laboratory*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230027, *China*)

[3)] (*Department of Physics*, *Anhui Normal University* , *Wuhu* 241000, *China*)

[4)] (*Institute of High Energy Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100039, *China*)

(Received 18 October 2002; revised manuscript received 10 December 2002)

Abstract

Based on the solution to Bargmann-Wigner equation for an arbitrary integral spin, a further investigation on the projection operator and propagator for an arbitrary integral spins is carried out. The explicit form of the projection operators for integral spins constructed by Behrends and Fronsdal is checked and confirmed; the commutation rules and general expressions for the Feynman propagator for a free particle of an arbitrary integral spin are derived.

Keywords: integral spin, projection operator, commutation rule, Feynman propagator

PACC: 1100, 1180C, 1480

* Project supported partially by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19947001, 90103010 and 19991480), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2001CCB01000), the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 97035807), the Beijing Positive-Negative Electron Collision National Laboratory of China, Center for Theoretical Nuclear Physics of Lanzhou Heavy Ion Accelerator National Laboratory of China, the Natural Science Foundation of Anhui Province (Grant No. 01046202) and the Education Committee Foundation of Anhui Province, China (Grant Nos. 2003KJ035ZD and 2002HBL05).