第 52 卷 第 8 期 2003 年 8 月
1000-3290/2003/52(08)/1916-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.8, August, 2003
©2003 Chin. Phys. Soc.

相互作用原子玻色-爱因斯坦凝聚体诱导的光场压缩效应

周 明 方家元 黄春佳

(长沙电力学院物理与信息工程系, 长沙 410077)

(2002 年 9 月 9 日收到; 2002 年 12 月 24 日收到修改稿)

给出了光场与二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)相互作用系统的哈密顿量,研究了原子间相互作用对压缩相干态光场与原子 BEC 相互作用系统中光场正交压缩特性的影响.结果表明:光场两正交分量的涨落均随时间按余弦规律周期性地变化,其压缩性质依赖于光场的初始压缩因子和压缩方向角,而原子间的相互作用影响光场正交分量的涨落随时间变化的幅度和周期.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 压缩相干态, 光场的正交压缩

PACC: 4250

1. 引 言

1995 年,美国科学家在实验室观察到中性碱金属原子的玻色-爱因斯坦凝聚[1,2].这一物理学发展史上具有里程碑意义的重大进展,开辟了一个全新的物理学研究领域,人们以极大的兴趣对原子玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)的产生及其独特性质以及原子 BEC 与光场的相互作用进行了大量的实验和理论研究,取得了一系列重要成果[3—12].我们知道,光场与原子的相互作用在原子的冷却、BEC 的制备和探测过程中起着极为重要的作用.因此,深入研究 BEC 的光学性质不仅有助于研究 BEC 自身的特性,而且可能为 BEC 的制备和探测提供有效的方法. You 等[5]提出的一种普遍的与光子相互作用的原子量子场论,不仅可用于处理超冷原子的量子统计性质,而且可用于描写原子 BEC 的形成以及 BEC 的量子光学性质.孙昌璞等[6]针对原子激光的耦合输出实验提出了一种类似于 J-C 模型的理论分析模型.其后,景辉等[7]进一步研究了压缩原子激光的量子动力学理论,提出利用压缩相干态光场与原子 BEC 的相互作用可以产生压缩原子激光.最近,景辉等又提出了一种利用强入射光控制原子激光相干性的方法,并证明了输出的原子激光束将会随时间演化而呈现一些非经典性质,如亚泊松分布和正交压缩性质等[8].本文在文献[7]的基础上,提出了考虑原子间相互作用的情况下光场-原子 BEC 相互作用系统的理论模型,并进一步讨论了原子间相互作用对原子 BEC 与压缩相干态光场相互作用系统中光场压缩特性的影响.结果表明:在压缩相干态光场与原子 BEC 相互作用系统中,光场两正交分量的涨落均随时间按余弦规律周期性地变化,其压缩性质依赖于光场的初始压缩因子和压缩方向角,而原子间的相互作用影响光场正交分量的涨落随时间变化的幅度和周期.

2. 系统哈密顿量和态矢

考虑光场与二能级原子 BEC 的相互作用系统,将系统哈密顿量表示为

$$H = H_A + H_F + H_{FA} + H_{AA}, \tag{1}$$

式中 H_A 代表裸原子哈密顿量, H_F 代表自由场哈密顿量, H_{FA} 代表光场-原子相互作用哈密顿量, H_{AA} 代表原子-原子相互作用哈密顿量.在二次量子化后的粒子数表象中,它们分别表示为

$$H_A = \int d^3 r \psi^+(\boldsymbol{r}) \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V\right) \psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=0}^{1} E_i b_i^+ b_i, \tag{2}$$

式中 E_0 和 E_1 分别表示原子基态和激发态能量, b_i^+, b_i ($i=0,1$) 分别表示原子(基态和激发态)的产生算符和湮没算符.对二能级原子,可取 $E_0 = 0$,并

记 $E_1 = \omega_0$，得到

$$H_A = \omega_0 b_1^+ b_1, \tag{3}$$

$$H_F = \frac{1}{8\pi}\int d^3 \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{E}^2) = \omega a^+ a, \tag{4}$$

$$H_{FA} = \int d^3 \boldsymbol{r}\psi^+(\boldsymbol{r})\left(-\frac{q}{mc}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}\right)\psi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(a + a^+)(b_0^+ b_1 + b_0 b_1^+). \tag{5}$$

取旋波近似，得

$$H_{FA} = \varepsilon(a^+ b_0^+ b_1 + a b_0 b_1^+), \tag{6}$$

式中 $\varepsilon = \frac{e}{m_e}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}}\int d^3 r u_0^*(\boldsymbol{r})(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}\cdot\nabla)u_1(\boldsymbol{r})$，此处 $u_i(\boldsymbol{r})$ 为原子能量本征函数，ε 表征光场与原子相互作用的强度.

$$\begin{aligned}H_{AA} &= \frac{1}{2}\int d^3[\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi^+(\boldsymbol{r}_2) \\ &\quad\times U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)] \\ &= \sum_{ijkl=0}^{1} U_{ijkl} b_i^+ b_j^+ b_k b_l \delta_{i+j,k+l},\end{aligned} \tag{7}$$

式中 $U_{ijkl} = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 u_i^*(\boldsymbol{r}_1)u_j^*(\boldsymbol{r}_2)U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \times u_k(\boldsymbol{r}_1)u_l(\boldsymbol{r}_2)$.

设 $U_{ijkl} = \Omega$（Ω 与 $i\ j\ k\ l$ 排序无关）

$$\begin{aligned}H_{AA} &= \Omega\sum_{ijkl=0}^{1} b_i^+ b_j^+ b_k b_l \delta_{i+j,k+l} \\ &= \Omega(b_0^+ b_0^+ b_0 b_0 + b_0^+ b_1^+ b_0 b_1 \\ &\quad + b_1^+ b_0^+ b_1 b_0 + b_1^+ b_1^+ b_1 b_1),\end{aligned} \tag{8}$$

系统的总哈密顿量为

$$\begin{aligned}H &= \omega_0 b^+ b + \omega a^+ a + \varepsilon(a^+ b_0^+ b + a b_0 b^+) \\ &\quad + \Omega(b_0^+ b_0^+ b_0 b_0 + b_0^+ b_1^+ b_0 b_1 \\ &\quad + b_1^+ b_0^+ b_1 b_0 + b_1^+ b_1^+ b_1 b_1).\end{aligned} \tag{9}$$

我们只讨论弱光场情形，为了使体系的运动方程便于求解，采用熟知的 Bogoliubov 近似[13]. 假定初始时刻处于 BEC 态的原子数目很大，以至于在与光场相互作用的过程中基态原子数的缓慢变化可以忽略不计，从而可以将系统哈密顿量中的 b_0 和 b_0^+ 分别用 $\sqrt{N_0}e^{-i\theta}$ 和 $\sqrt{N_0}e^{i\theta}$ 替代，略去含 $b_1^+ b_1^+ b_1 b_1$ 的项，记 $b_1 = b$，$b_1^+ = b^+$，将系统哈密顿量简化为

$$\begin{aligned}H &= \omega_0 b^+ b + \omega a^+ a + \varepsilon\sqrt{N_0}(a^+ b e^{i\theta} + a b^+ e^{-i\theta}) \\ &\quad + \Omega(N_0^2 + 2N_0 b^+ b).\end{aligned} \tag{10}$$

为了更清楚地揭示原子 BEC 中原子间相互作用对光场-BEC 系统能量的影响，将系统哈密顿量改写为

$$\begin{aligned}H &= (\omega_0 + 2N_0\Omega)b^+ b + \omega a^+ a \\ &\quad + \varepsilon_0\sqrt{N_0}(a^+ b e^{i\theta} + a b^+ e^{-i\theta}) + N_0^2\Omega.\end{aligned} \tag{11}$$

从(11)式可以看出，BEC 中原子间的相互作用使原子的能级间隔由原来的 ω_0 增大到 $\omega_0 + 2N_0\Omega$，能级间隔的增加量 $\Delta = 2N_0\Omega$ 与 BEC 中的原子数 N_0 和原子间的相互作用强度 Ω 的乘积成正比.

在共振条件($\omega = \omega_0$)下，求解系统的 Heisenberg 运动方程

$$\mathrm{i}\dot{a} = [a, H] = \omega a + \varepsilon\sqrt{N_0}\, b e^{i\theta}, \tag{12}$$

$$\mathrm{i}\dot{b} = [b, H] = \varepsilon\sqrt{N_0}\, a e^{-i\theta} + (\omega_0 + 2N_0\Omega)b, \tag{13}$$

得到

$$\begin{aligned}a(t) &= \frac{e^{-i(\omega+N_0\Omega)t}}{\gamma}\{[\gamma\cos(\gamma t) + \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)] \\ &\quad\times a(0) - \mathrm{i}\sqrt{N_0}\varepsilon\sin(\gamma t)e^{i\theta}b(0)\},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}b(t) &= \frac{e^{-i(\omega+N_0\Omega)t}}{\gamma}\{-\mathrm{i}\sqrt{N_0}\varepsilon\sin(\gamma t)e^{-i\theta}a(0) \\ &\quad + [\gamma\cos(\gamma t) - \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]b(0)\},\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\gamma = \sqrt{N_0(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)}$.

3. 光场的压缩效应

设初始时刻所有原子均处于基态并发生 BEC，激发态为真空态. 系统的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta_0\rangle \otimes |\Phi(0)\rangle. \tag{16}$$

(16)式中 $|\beta_0\rangle$ 为原子基态湮没算符 b_0 的本征态，表示在基态发生 BEC 的原子处于相干态，即有 $b_0|\beta_0\rangle = \sqrt{N_0}e^{-i\theta}|\beta_0\rangle$，此处 N_0 为处于 $|\beta_0\rangle$ 态的平均原子数. 而 $|\Phi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |\alpha, \xi\rangle$，其中 $|0\rangle$ 和 $|\alpha, \xi\rangle$ 分别表示初始时刻原子的激发态为真空态而光场处于压缩相干态，$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$，其中 $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$，$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi a^2 - \xi a^{+2})\right]$，且有 $\alpha = \sqrt{n}e^{i\eta}$，$\xi = r e^{i\varphi}$，$n$ 为初始光场的平均光子数，r 为光场的初始压缩因子.

为了研究光场的压缩效应，定义光场的两个缓变的正交分量算符[14]

$$U_1 = (a e^{i\omega t} + a^+ e^{-i\omega t})/2, \tag{17}$$

$$U_2 = (a e^{i\omega t} - a^+ e^{-i\omega t})/(2\mathrm{i}). \tag{18}$$

U_1，U_2 满足下列对易关系：

$$[U_1, U_2] = \mathrm{i}/2. \tag{19}$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)^2(\Delta U_2)^2 \geqslant 1/16. \tag{20}$$

引入

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - \frac{1}{4} \qquad (i = 1,2). \tag{21}$$

若在某一状态下，有 $Q_i < 0$（$i = 1$ 或 2），则意味着光场的第 i 个正交分量的量子噪声被压缩．当处于 BEC 的原子数足够大，满足 $N_0\Omega \gg \varepsilon$ 时，利用 (14)，(15) 式，可以得到

$$\begin{aligned} Q_1(t) = &\frac{1}{2}\sinh r(\sinh r + \cosh r\cos\varphi) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4N_0\Omega^2}\sinh r\big[\sinh r\cos(2N_0\Omega t) \\ &+ \cosh r\cos(2N_0\Omega t - \varphi)\big], \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} Q_2(t) = &\frac{1}{2}\sinh r(\sinh r - \cosh r\cos\varphi) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4N_0\Omega^2}\sinh r\big[\sinh r\cos(2N_0\Omega t) \\ &- \cosh r\cos(2N_0\Omega t - \varphi)\big]. \end{aligned} \tag{23}$$

从(22)，(23)式不难看出，光场的任一正交分量的涨落能否压缩取决于光场的初始压缩因子 r 和压缩方向角 φ，当

$$\cos(\varphi + \pi) > \tanh r \tag{24}$$

时，有 $Q_1 < 0$ 但 $Q_2 > 0$，即光场的 U_1 分量可被压缩而 U_2 分量不可压缩；而当

$$\cos\varphi > \tanh r \tag{25}$$

时，有 $Q_2 < 0$ 但 $Q_1 > 0$，即光场的 U_2 分量可被压缩而 U_1 分量不可压缩．

从(22)，(23)式还可看出，若取 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = \pi$，光场的两正交分量的涨落均随时间按余弦规律周期性地变化，其振荡周期为 $T = \frac{\pi}{N_0\Omega}$，振幅为 $\frac{\varepsilon^2\sinh r(\cosh r - \sinh r)}{4N_0\Omega^2}$，对于光场可压缩的正交分量，其平均压缩深度为 $\sinh r(\sinh r - \cosh r)/2$．可见，光场的平均压缩深度与原子间相互作用无关，仅取决于光场的初始压缩因子 r，但在初始光场及其与 BEC 相互作用系数强度一定的情况下，BEC 中原子间的相互作用越强，光场两正交分量涨落随时间变化的幅度越小，周期越短．

4．结 论

本文运用全量子理论，在旋波近似和 Bogoliubov 近似下，考虑原子间的相互作用，给出了单模光场与二能级原子 BEC 相互作用系统的哈密顿量，求解了系统的动力学方程，并进一步讨论了原子间相互作用对压缩相干态光场与原子 BEC 相互作用系统中光场正交压缩特性的影响．结果表明：在与原子 BEC 相互作用过程中，光场两正交分量的涨落均随时间按余弦规律周期性地变化，其能否被压缩主要决定于光场的初始压缩因子 r 和压缩方向角 φ，当 $\cos(\varphi + \pi) > \tanh r$ 时，光场的 U_1 分量可被压缩而 U_2 分量不可压缩；而当 $\cos\varphi > \tanh r$ 时，光场的 U_2 分量可被压缩而 U_1 分量不可压缩．同时，光场两正交分量涨落的平均压缩深度与 BEC 中原子间相互作用无关，仅取决于光场的初始压缩因子 r，但原子间的相互作用影响光场两正交分量的涨落随时间变化的幅度和周期．

[1] Anderson M H，Enscher J R，Methews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Davis K B，Mewes M O，Andrews M R *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3969

[3] Mewes M O，Andrews M R，Kurn D M *et al* 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **78** 582

[4] Anderson B P，Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686

[5] You L，Lewenstein M，Cooper J 1995 *Phys*. *Rev*. A **51** 4712

[6] Sun C P，Zhan H，Miao Y X *et al* 1998 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **29** 161

[7] Jing H，Chen J L，Ge M L 2001 *Phys*. *Rev*. A **63** 15601

[8] Jing H，Ge M L 2001 *Science in China*（Series A）**31** 725（in Chinese）[景 辉、葛墨林 2001 中国科学（A 辑）**31** 725]

[9] Kuang L M 1998 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **30** 161

[10] Kuang L M，Ouyang Z W 2000 *Phys*. *Rev*. A **61** 023604

[11] Zhao Z Q，Kuang L M 2000 *Acta Sin*. *Quant*. *Opt*. **6** 29（in Chinese）[赵志强、匡乐满 2000 量子光学学报 **6** 29]

[12] Zhou M，Huang C J 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2514（in Chinese）[周明、黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514]

[13] Ni G J，Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanics*（Shanghai：Fudan University Press）p372（in Chinese）[倪光炯、陈苏卿 2000 高等量子力学（上海：复旦大学出版社）第 372 页]

[14] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京 科学出版社) 第 185 页]

Squeezing effect of light caused by Bose-Einstein condensate composed of interactive atoms

Zhou Ming Fang Jia-Yuan Huang Chun-Jia
(*Department of Physics and Information Engineering*, *Changsha University of Electric Power*, *Changsha* 410077, *China*)

(Received 9 September 2002; revised manuscript received 24 December 2002)

Abstract

The Hamiltonian operator of a system of single-mode light field interacting with Bose-Einstein condensate (BEC) of two-level atoms is suggested within the rotating-wave approximation. The influence of the interaction between atoms in the BEC on the quadrature squeezing properties of single-mode squeezed light interacting with atomic BEC is studied under Bogoliubov approximation. The results show that the fluctuations of two quadrature components of light evolve periodically in a cosine law and their squeezing properties are determined mainly by the initial squeeze factor and squeeze direction angle of light, and that the interaction between atoms in BEC changes the amplitude and period of fluctuation of light.

Keywords: Bose-Einstein condensate, squeezed state, quadrature squeezing of light
PACC: 4250